
محمد راتول
بحوث العمليات
ديوان المطبوعات الجامعية
محمد راتول
بحوث العمليات
OPU
المؤلف من مواليد 13 جانفي 1963 بولاية تسمسيلت، أتم دراسته الجامعية بجامعة الجزائر حيث حصل على شهادة دكتوراه دولة في العلوم الإقتصادية، إبتدأ التدريس الجامعي سنة 1987 كمعيد بمعهد العلوم السياسية و العلاقات الدولية و معهد العلوم الإقتصادية بجامعة الجزائر، لينتقل سنة 1989 إلى جامعة الشلف حيث يشغل بها حاليا منصب أستاد محاضر، ومشرفا علميا على الماجستير في النقود و المالية، كما شغل منصب عميد كلية العلوم الإنسانية و العلوم الإجتماعية لغاية سبتمبر 2003، ويدير حاليا مخبر العولمة و شمال إفريقيا الدي أنشأه بالجامعة سنة 2003.
الكتاب الدي بين يديك عبارة عن مجموعة من المواضيع الجوهرية المنقحة في بحوث العمليات، قدمها كمحاضرات لعدة تخصصات لها علاقة بالعلوم الإقتصادية و علوم التسيير، وقد حرص في تقديمها على البساطة في السرد و المنهجية في العرض، مبتعدا قدر الإمكان عن أسلوب العرض الرياضي البحت، معتمدا في الشرح و التوضيح على الأمثلة دات التطبيقات الإقتصادية المباشرة في الغالب، و مجتهدا في إستعمال أنسب المصطلحات، وقد إحتوى عددا لا بأس به من المواضيع الهادفة إلى التسيير الأمثلي للموارد الإقتصادية، وهدا من خلال ستة عشر فصلا مستقلا، مراعيا فيها الترتيب حسب الأهمية البيداغوجية و العلمية.
وإد يقدم هدا العمل المتواضع، فإنه لا يسعه إلا أن يطلب من القارئ أن يفيده بملاحظاته حول أي خطأ مهما كان، أو أية ملاحظة، وهدا لتأهيله مستقبلا، ليكون مرجعا معتمدا دا قيمة بيداغوجية عالية إن شاء الله.
Conception: O.P.U-Y.S
4619
390 دج

الدكتور
محمد راتــول

بحوث العمليات

الطبعة الثانية

ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر

رقم النشر: 4.01.4619
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 9961.0.0735.2
رقم الإيداع القانوني: 2004/1601.

بسم الله الرحمان الرحيم

الإهداء

الى الوالدين الكريمين

و عمي الحاج محمد

الى حرمي المصون...

الى الأبناء...

محمد و عبدالمالك.

مليكة و فاطمة الزهراء.

فصـــول الكـتـــاب



مقدمة.

الكتاب الذي بين يديك عبارة عن مجموعة من المواضيع الجوهرية المنقحة في بحوث العمليات، قُدمت كمحاضرات لعدة تخصصات لها علاقة بالعلوم الإقتصادية، وقد حرصت في تقديمها على البساطة في السرد و المنهجية في العرض، مبتعدا قدر الإمكان عن أسلوب العرض الرياضي البحت، متوخيا في ذلك تسهيل فهم المواضيع بإعتبار المطبوعة موجهة أساسا لطلبة فروع علوم الإقتصاد و التسيير و التجارة، معتمدا في الشرح و التوضيح على الأمثلة ذات التطبيقات الإقتصادية المباشرة في الغالب، و مجتهدا في إستعمال أنسب المصطلحات، و قد إحتوى عددا لا بأس به من المواضيع الهادفة الى التسيير الأمثلي للموارد الإقتصادية، و هذا من خلال ستة عشر فصلا مستقلا، مراعيا فيها الترتيب حسب الأهمية البيداغوجية و العلمية، و هي مرتبة على النحو التالي:

الفصل الأول: البرمجة الخطية مفهومها و إستخداماتها.
الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي بيانيا.
الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام- طريقة السمبليكس.
الفصل الرابع: الثنائية.
الفصل الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة.
الفصل السادس: مسائل النقل- تدنئة التكاليف-.
الفصل السابع: مسائل النقل- تعظيم الأرباح و العوائد-.
الفصل الثامن: مسائل التخصيص.
الفصل التاسع: نظرية القرارات
الفصل العاشر: مدخل لنظرية البيانات.
الفصل الحادي عشر: نظرية الشجرة المثلى.
الفصل الثاني عشر: نظرية المسارات المثلى.
الفصل الثالث عشر: نظرية التدفق الأعظمي

الفصل الرابع عشر: تحليل شبكات الأعمال-طريقة المسار الحرج CPM-

الفصل الخامس عشر: أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنياتPERT

الفصل السادس عشر: التسيير الأمثل للمخزون

و قد أنهيت كل فصل بمجموعة من التمارين التطبيقية، لتكون نموذجا للتدريب في حصص الأعمال الموجهة.

و إذ أقدم هذا العمل المتواضع لطلبتنا و أساتذتنا، فإنه لايسعني إلا أن أطلب من القارىء أن يفيدني بملاحظاته حول أي خطأ مهما كان، أو أية ملاحظة، وهذا لتأهيله مستقبلا، ليكون مرجعا معتمدا ذا قيمة بيداغوجية عالية إن شاء الله.

الأستاذ: م.راتول.

مدخل

بحوث العمليات، مفهومها و تطورها

لا يوجد تعريف واحد محدد شافي لبحوث العمليات، حيث إختلفت تعاريفها بين روادها، فهناك من يعرفها بأنها" **طريقة علمية لإمداد الإدارة التنفيذية بأساس كمي للقرارات الخاصة بالعمليات تحت رقابتهم**" و هو التعريف الذي أعطاه كل من G.KIMBALL و P.MORSE لبحوث العمليات، أو أنها " **إستخدام الطرق العلمية و الأساليب و الأدوات لحل المشاكل التي تحتوي على عمليات النظم لإمداد المديرين بالحلول المثلى للمشاكل**" و هو التعريف الذي قدمه كل من R.ACKOFF وG.CHORCHMAN ، أو هي " **نظرية القرارات التطبيقية و إستخدام الطرق العلمية و الرياضية في حل المشاكل التي تواجه المنفذين**" و هو التعريف الذي أعطاه M.STARR و M.MILLER، أو أنها " **إستخدام المنهج العلمي لحل المشاكل للمديرين التنفيذيين**" كما يعرفها H.WANGER، و هي تعاريف تكاد تشترك في بعض المصطلحات الأساسية، و لعل أهم المصطلحات التي شملتها هذه التعاريف، الطريقة العلمية، الأساليب و الأدوات -و يقصد بها الأساليب الرياضية و الإحصائية-، مشاكل المديرين، القرارات، الحلول المثلى، و هي مصطلحات تنم عن فهم كل باحث لبحوث العمليات، غير أننا نرى أن بحوث العمليات تطورت لتأخذ مفهوم أوسع، لدرجة أن هناك من يضفي صفة العلمية عليها لتطورها المستمر و إستخدامها لأساليب البحث العلمي فيقول " **إن علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعة من الطرق و الوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الإستخدام الأفضل للموارد**

البشرية المتاحة" و هو التعريف الذي يدلي به د. موفق محمد الكبيسي في كتابه المشار إليه في قائمة المراجع، و هو تعريف مشابه للتعريف الذي يقدمه د. محمد محمد كعبور في الكتاب المشار إليه أيضا في قائمة المراجع، و من جهتي فإن التعريف الذي أكاد أستقر عليه و الذي تبلور لدي على إمتداد فترة تدريسي لهذا المقياس هو أن " **بحوث العمليات هي مجموعة الطرق والأساليب العلمية المساعدة لإتخاذ قرارات التسيير العلمي الأمثلي في الإدارة، و هي تعتمد على القياس الكمي بمساعدة الأساليب الإحصائية والرياضية، جوهر ما تتناوله هو البحث عن أمثلية تسيير الموارد المادية و البشرية في مختلف المؤسسات في ظل ظروف كمية محددة**".

وقد سميت ببحوث العمليات لكون أولى البحوث وتطبيقاتها في هذا المجال كانت على ***العمليات الحربية***. و رغم أن ميلاد طرق بحوث العمليات كان في سنة 1936 في بريطانيا، إلاّ أن نشوءها الحقيقي كان خلال فترة الحرب العالمية الثانية عندما دعت الإدارة العسكرية الإنجليزية فريقا من العلماء من جامعة مانشيستر برئاسة الأستاذ PMS BLACKETT لدراسة المشاكل التقنية و الإستيراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا، إذ كان هدف الفريق هو الإستخدام الأمثلي للموارد الحربية المحدودة، و قد أدى ذلك الى نتائج جيدة على مستوى تحسين منظومة الرادار و الدفاع المدني، وهو ما أدى بإدارة الحرب الأمريكية الى إجراء دراسات مماثلة بمبادرة من كل من B. James رئيس لجنة بحوث الدفاع وB.ANNEVAR رئيس لجنة الأسلحة و المعدات الجديدة و ذلك لكونهما شاهدا إستخدام هذا الأسلوب في بريطانيا أثناء إقامتهم بها خلال فترة الحرب العالمية الثانية.

بعد أكتوبر 1942 شكلت القوات الجوية الثانية المرابطة في بريطانيا أول فريق لتحليل العمليات الحربية، تلاها السلاح البحري الأمريكي الذي شكل فريقين أحدهما في مصنع المعدات البحرية و ترأسه J. ELLISA و الثاني في الأسطول العاشر وترأسه M. PHILIP و قد واصل القادة العسكريون الإهتمام بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات و التي تحولت فيما بعد الى مؤسسة بحوث العمليات.

و نظرا للنجاح الذي لقيه هذا الأسلوب في إدارة العمليات الحربية فقد تم نقله للإدارة المدنية و بخاصة الى إدارة الأعمال والمشاريع الإقتصادية، و قد قام في بريطانيا فريق من الباحثين بتأسيس نادي بحوث العمليات سنة 1948 و الذي حول الى جمعية بحوث العمليات للملكة المتحدة و التي أصدرت أول مجلة علمية ربع سنوية لها سنة 1950 . كما تم تأسيس جمعية بحوث العمليات الأمريكية و معهد الإدارة العلمية سنة 1950 في الولايات المتحدة، و قد أصدرت الجمعية أول مجلة لها هي مجلة " بحوث العمليات " سنة 1952 كما أصدر المعهد أيضا " مجلة الإدارة العلمية " سنة 1953 و هذا ما ساعد على شق الطريق لتنمية هذا الأسلوب وإستخداماته في مختلف مجالات التسيير ومجالات إتخاذ القرارات.

و على المستوى الفردي و في الجانب المدني ساهم الكثير من الرواد في بعث بحوث العمليات، فقد ظهرت بعض أساليبها تحت عنوان الإدارة العلمية بمساهمة العديد من رواد هذه الإدارة، حيث ساهم كل منهم في إظهار فكرة من الأفكار المستخدمة في التسيير الأمثلي، و على سبيل المثال قام كل من فريديريك طايلور F.W.TAYLOR و هنري فايول H.FAYOL و جيلبيرت GILBERT و ألتون مايو A.MAYO

باستخدام الطرق العلمية في الإنتاج وتطبيق مبدأ التخصص وظهور الدراسات الخاصة بالوقت و الحركة، و من الرواد أيضا GANTT (1919-1966)، حيث استخدم الرسومات البيانية لتوضيح الأعمال المختلفة للمشروع و إظهار الوقت اللازم، حيث تطورت أفكاره بظهور أسلوب تقويم البرامج و مراجعة التقنيات المعروف بأسلوب بيرت PERT، كما قام المهندس الدانماركي إرلنج A.K.ERLANG سنة 1907 و الذي كان موظفا بشركة كوبنهاجن للهاتف، بدراسة مشكلة الإزدحام على الخطوط الهاتفية لتتطور أفكاره بإدخال الأساليب الرياضية في إبداع نظرية طوابير الإنتظار و المنسوبة الى ماركوف، كما ظهرت المحاولة الأولى لصياغة نظرية المباريات في صورة رياضية عن طريق أميل بوريل E.BOREL سنة 1921 و التي طورها فيما بعد نيومان J.V.NEWMAN سنة 1928، و الى ذلك أيضا قام العالم الإمريكي جورج دونتزيغ G.DANTIZIG سنة 1949 بتطوير طريقة لحل مشاكل التعظيم و التدنئة بأسلوب جديد هو أسلوب البرمجة الخطية باستخدام طريقة سميت بطريقة السمبليكس أو طريقة دونتزيغ، حيث إستخدمت لأول مرة من طرف شركات البترول الأمريكية في تخطيط الإنتاج. و ساهم الإقتصادي الروسي كونتروفيتش KANTROVICH بتقديم أبحاث عن مشاكل الإستخدام الأمثل للموارد سنة 1939، أما مسائل النقل فقد قام العالم الإمريكي فوقل VOGEL بصياغة طريقة لحلها كما قام كل من A.CHARNES وK.KOOPER بتطوير طريقة التوزيع المعدل المستعملة في مسائل النقل، و في ما يتعلق بمسائل شبكات الأعمال فقد قام العالمان الأمريكيان WALKER و J.KELLY سنة 1957 باستخدام طريقة المسار

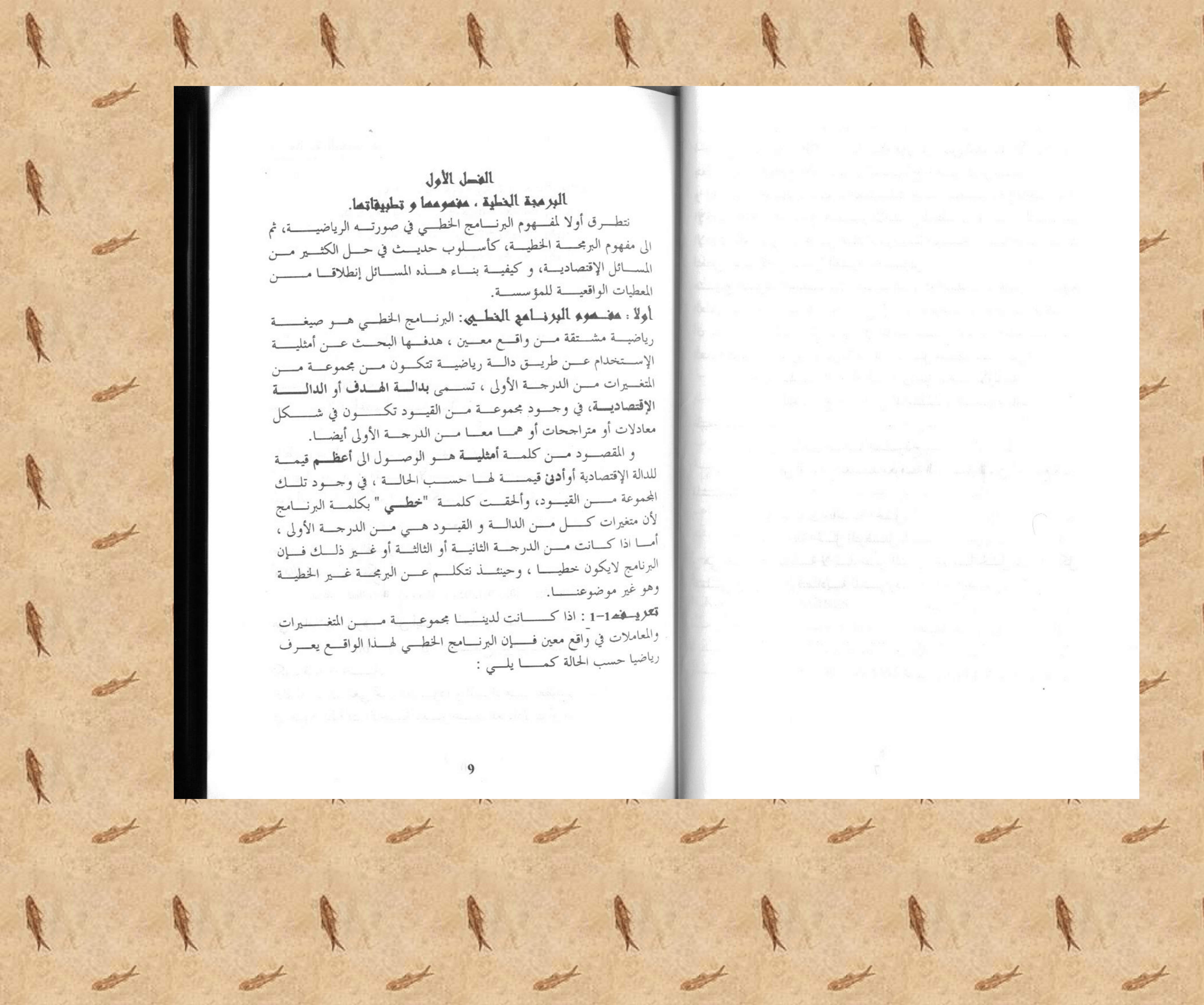
الحرج المسماة CPM، كما قام فريق من العلماء الأمريكان بتطوير بعض النماذج الأخرى كنموذج المخزون لويلسون.

و يظهر أن ظهور بحوث العمليات جاء نتيجة الحاجة في الإقتصاد و الحاجة في التسيير الأمثلي لمختلف نواحي التسيير الإداري للموارد، و على فترات زمنية طويلة نسبيا إمتدت لتغطي تقريبا كامل فترة القرن العشرين.

منهج بحوث العمليات: تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي إبتداء من بناء النموذج الى حله فإختباره فتطبيقه، كون أن التحضير لإتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي:

- تحديد المشكلة و تحليلها الى عناصرها الأولية.
- بناء النموذج الرياضي المناسب و الذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
- إختبار مدى صحة النموذج.
- إيجاد حل للنموذج بعد معرفة الطريقة التي تخضع لها المشكلة.
- إختبار مدى مناسبة الحل.
- تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها.

و هي خطوات منهجية لا بد من المرور عبرها لحل أي مشكل عملي في الإدارة الإقتصادية للموارد.



الفصل الأول

البرمجة الخطية ، مفهومها و تطبيقاتها.

نتطرق أولا لمفهوم البرنامج الخطي في صورته الرياضية، ثم الى مفهوم البرمجة الخطية، كأسلوب حديث في حل الكثير من المسائل الإقتصادية، و كيفية بناء هذه المسائل إنطلاقا من المعطيات الواقعية للمؤسسة.

أولا : مفهوم البرنامج الخطي: البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين ، هدفها البحث عن أمثلية الإستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى ، تسمى **بدالة الهدف أو الدالة الإقتصادية**، في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

و المقصود من كلمة **أمثلية** هو الوصول الى **أعظم** قيمة للدالة الإقتصادية **أوأدنى** قيمة لها حسب الحالة ، في وجود تلك المجموعة من القيود، وألحقت كلمة "**خطي**" بكلمة البرنامج لأن متغيرات كل من الدالة و القيود هي من الدرجة الأولى ، أما اذا كانت من الدرجة الثانية أو الثالثة أو غير ذلك فإن البرنامج لايكون خطيا ، وحينئذ نتكلم عن البرمجة غير الخطية وهو غير موضوعنا.

تعريف1-1 : اذا كانت لدينا مجموعة من المتغيرات والمعاملات في واقع معين فإن البرنامج الخطي لهذا الواقع يعرف رياضيا حسب الحالة كما يلي :

1- حالة التعظيم:

$$\text{Max: } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_n$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. x_3 \ge 0, \ldots x_n \ge 0 \end{cases}$$

حيث: Max تعني تعظيم، أي Maximisation، و مفادها جعل الدالة Z في أعظم قيمة لها.

$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ . \ . \ . \ x_n$: هي متغيرات البرنامج، والمطلوب البحث عن قيمها، و يشترط أن تكون غير سالبة كما يدل على ذلك القيد الأخير، و عدم سالبيتها شرط منطقي يعود أساسا الى أن الكميات لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة.

$c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3 . \ . \ . \ c_n$: معاملات الدالة المراد تعظيمها شريطة إحترام القيود، و تسمى هذه الدالة ***بالدالة الإقتصادية*** أو ***دالة الهدف***، و يمكن أن تأخذ أية قيمة.

$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, a_{21}, a_{22} \ldots a_{2n}, a_{31}, a_{32}, \ldots a_{3n} \ldots . a_{m1}, a_{m2} \ldots a_{mn}$

هي معاملات القيود و يمكن أيضا أن تأخذ أية قيمة.

$b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3 . \ . \ . \ b_m$: شعاع الثوابت، و يشترط أن تكون قيمه موجبة.

s/c أو ت/ق: تعني تحت القيود، و المراد هو تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات.

و يمكن كتابة هذا البرنامج أيضا بالشكل المصفوفي على النحو التالي:

$$\text{Max}: Z = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ldots c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإختصارا يكتب البرنامج كما يلي:

$$\text{Max}: Z = C'\mathbf{X}$$
$$s/c \begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

حيث: C' هو منقول مصفوفة معاملات الدالة الإقتصادية.

X : هو شعاع المتغيرات.

A : هي مصفوفة معاملات القيود.

B : شعاع الثوابت.

مثال 1-1: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Max}: Z = 100x_1 + 60x_2$$
$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 1080 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 960 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة:

الدالة الإقتصادية تكتب كما يلي:

$$\text{Max}: Z = [100 \;\; 60] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$

و في الأخير قيد عدم السالبية يكتب على النحو:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- حالة التدنئة:

في حالة التدنئة يكتب البرنامج الخطي بصفة عامة كما يلي:

$$\text{Min}: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$
$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots\ldots x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث تعني العبارة Min تدنئة أي .Minimisation، و يراد بها تعظيم الدالة Z تحت مجموعة القيود.

وبالشكل المصفوفي يكتب البرنامج على النحو التالي:

$$\text{Min}: Z = \begin{bmatrix} c_1 c_2 \; c_3 \ldots c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما بالشكل المصفوفي المختصر فيكتب البرنامج كما يلي:

$$\text{Min}: Z = \mathbf{C'} \;\; \mathbf{X}$$
$$s/c \begin{cases} \mathbf{AX} \geq \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

حيث: $\mathbf{C'}$ هو منقول شعاع معاملات دالة الهدف، **X** هو شعاع المتغيرات، **A** مصفوفة القيود، **B** هو شعاع الثوابت.

مثال 1-2: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Min}: Z = 4x_1 + 18x_2 + 2x_3$$
$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 14x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_3 \geq 14 \\ 2x_1 + 34x_2 + 30x_3 \geq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة :

دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$\text{Min}: Z = \begin{bmatrix} 4 & 18 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على النحو التالي:

$$s/c \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يظهر من هذا العرض أن البرنامج الخطي في شكليه تعظيم أو تدنئة يتألف من المكونات التالية:

أ- دالة الهدف: تسمى أيضا بالدالة الإقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الإنتاج أو تعظيم الأرباح، أو تدنئة التكاليف ..الخ، و تكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

ب- القيود: هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن توجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الإعتبار. يتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

ج- شرط عدم السالبية: و يعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أوتساوي الصفر، لكونها تتعلق بكميات مادية، و الكميات المادية لايمكن أن تساوي قيم سالبة. و في حالات إستثنائية أين لايشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل.

ثانيا: مفهوم البرمجة الخطية: إن تشكيل البرنامج الذي رأينا في البند السابق إنطلاقا من مسائل واقعية وطرق حل

البرنامج و الوصول الى قيمة المتغيرات التي تعطي الحل الأمثل وإشكاليات ذلك ، هي من الموضوعات التي تدرسها البرمجة الخطية، ويظهر من هذا أن البرمجة الخطية ليست علما مستقلا بذاته ولا هي فنا ، بل هي مجموعة من الطرق الخاضعة لموضوع بحوث العمليات و الذي هو عبارة عن مجموعة من طرق التحليل العلمي يبحث على وجه الخصوص أمثليات الإستخدام للموارد الإقتصادية على مستوى الإقتصاد الجزئي خاصة ، وذلك بالإعتماد على الأساليب الرياضية.

ثالثا: مجالات إستخدام البرمجة الخطية : تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف الى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الإستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الإقتصادية و المالية و التجارية و علوم التسيير عامة ما يلي:

1 – في حالة التعظيم:

- تعظيم الأرباح.
- تعظيم الإنتاج.
- تعظيم طاقات التخزين.
- تعظيم إستخدام رؤوس الأموال.
- تعظيم إستخدام اليد العاملة.

و غير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

2 – في حالة التدنئة:

- تدنئة التكاليف.
- تدنئة الخسائر.
- تدنئة عدد الموظفين.
- تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة و غير ذلك من المسائل الهادفة الى عقلنة إستخدام الموارد.

رابعا: بناء البرنامج الخطي: تشكيل أو بناء البرنامج الخطي هو أهم خطوة في البحث عن الأمثلية ، و يقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية ، الى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح ، متكون من عدد من المتغيرات ، به دالة هدف كما تمت الإشارة إليها سابقا ، تكون إما في حالة تعظيم أو تدنئة ، و عدد من القيود تكون إما في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا.

ولتشكيل البرنامج الخطي ينبغي أولا تحديد المتغيرات ، ثم تشكيل **جدول المسألة** بعد ذلك ، بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود وكذا الكميات المحددة لدالة الهدف، و قبل ذلك ينبغي التأكد من تجانس المعطيات، إذ ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المتشابهة متجانسة ، كما ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المكونة لدالة الهدف أيضا متجانسة ، ويمكن للمثال التالي أن يعطي نظرة واضحة حول كيفية تشكيل البرنامج الخطي لمسألة ما.

مثال1-3: مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتوجات هي:

- خزائن حديدية . - مكاتب إدارية. - كراسي.

بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

- **الورشة 1** :تجري بها عملية صناعة الهياكل ، طاقة العمل القصوى بها هي : 32 ساعة عمل يوميا، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).
- **الورشة 2** : تجري بها عملية تركيب الملحقات ، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.

– **الورشة3** : تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف) ، طاقة العمل القصوى بها هي : 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق **أكبر ربح ممكن** ، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحد من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة، بينما الوحدة الواحدة من المتوج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في الورشة الأولى و 3 ساعات عمل في الورشة الثانية و 1 ساعة عمل في الورشة الثالثة.

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو:

– المنتوج الأول : 200 دج.

– المنتوج الثاني : 150 دج.

– المنتوج الثالث : 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة و التي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة.

الإجابة :

أول خطوة في إيجاد الصيغة الرياضية هي تحديد المتغيرات:

بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لتعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد الخزائن و عدد المكاتب وعدد الكراسي، وهي بالتالي متغيرات المسألة، لذلك نضع :

– عدد الخزائن : x_1

– عدد المكاتب: x_2

– عدد الكراسي: x_3

ثاني خطوة هي تحديد **جدول المسألة** : وهو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر القيود وعناصر دالة الهدف ، بحيث توضع المتغيرات بشكل عمودي ومعطيات القيود ودالة الهدف بشكل أفقي وذلك كما يظهر في الجدول 1-1.

جدول المسألة

منتوجات / ورشات	الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات — المنتوج1: x_1	المنتوج2: x_2	المنتوج3: x_3	الطاقة القصوى للورشات سا/ع
الورشة1	4	4	5	32
الورشة2	2	4	3	24
الورشة3	2	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة(دج)	200	150	120	

جدول1-1

الجدول أعلاه يلخص لنا بشكل كافي معطيات المسألة ، ومنه يظهر على سبيل المثال أن إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى وإنتاج وحدتين يتطلب 2×4 ساعة عمل و إنتاج الكمية x_2 يتطلب $4x_2$ ساعة عمل، وإذا ما تم إنتاج وحدة واحدة من كل منتوج فإن ذلك يتطلب: $1\times4+1\times4+1\times5=13$ ساعة عمل في الورشة الأولى، بينما الطاقة القصوى للورشة الأولى هي 32 ساعة عمل، و إذا ما أريد إنتاج الكميات: x_1,x_2, x_3 من كل منتوج، فإن وقت العمل المستغرق في الورشة الأولى هو:

$$4x_1+4x_2+5x_3$$

و يجب أن لايتجاوز 32 ساعة عمل و هي الطاقة القصوى لهذه الورشة، و بالمثل بالنسبة لبقية المنتوجات وعليه نستنتج منظومة القيود التالية:

1-قيد الورشة الأولى: $4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 32$

2-قيد الورشة الثانية: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 24$

3-قيد الورشة الثالثة: $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 16$

يعني القيد الأول أن الوقت المستغرق في إنتاج الكميات x_1،x_2،x_3 يجب أن لايتعدى 32 ساعة عمل في الورشة الأولى وتفسر بقية القيود بشكل مشابه.

و بما أن الكميات يستحيل أن تكون سالبة، لذلك فإن القيد الأخير يكتب كما يلي:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

كما يظهر من الجدول أيضا أن الوحدة الواحدة من المنتوج1 تجلب ربحا مقداره 200 وحدة نقدية ، و عند إنتاج وحدتين فإن الربح المحصل عليه من المنتوج الأول هو 400 وحدة نقدية ، وبالتالي إنتاج الكمية x_1 يجلب للمؤسسة $200\times x_1$ وبالمثل بالنسبة للمنتوجين الثاني و الثالث، وعليه تصمم دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max: Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

أي أن الهدف هو إيجاد قيم x_i التي تجعل Z في أعظم قيمة لها، دون تجاوز قدرات الورشات.

و عليه يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$Max : Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$
$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 32 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

و نكون بذلك قد إنتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة الى شكلها الرياضي، و هو ما يصطلح عليه **بتشكيل البرنامج الخطي أو بناء النموذج الخطي**، و هو مؤلف من مجمعين أساسيين: الأول هو دالة الهدف المراد تعظيمها، و الثاني هو مجموعة القيود التي يجب إحترامها.

تمارين

تمرين1: عرف البرنامج الخطي تعريفا كاملا.

تمرين2: ما هي مجالات إستخدام البرمجة الخطية.

تمرين3: صغ مسألة من نسيج خيالك، تستعمل البرمجة الخطية في حلها، مرة في حالة التعظيم و أخرى في حالة التدنئة.

تمرين4: صغ المسألة المشكلة في التمرين3 في الشكل الرياضي و أكتبها بالصيغة المصفوفية.

تمرين5: مؤسسة لصنع الأثاث المترلي تنتج نوعين من الأسرة، غير أن طاقة تموينها بمادة الخشب محدودة، إذ لا تُتاح لها أسبوعيا سوى 12 صفيحة خشبية، كما أن ورشة العمل لايمكنها أن تتسع لأكثر من 72 ساعة عمل خلال نفس الفترة.إذا علمت أن:

-السرير الواحد من النوع الأول يتطلب صفيحتين من الخشب و10 ساعات عمل.

- السرير الواحد من النوع الثاني يتطلب صفيحة واحدة من الخشب و 8 ساعات عمل.

و أن ثمن السرير الواحد من النوع الأول هو 1300 دج و ثمن السرير الواحد من النوع الثاني هو 800 دج. و أن تكلفة السرير الواحد من النوع الأول هي 300 دج و تكلفة السرير الواحد من النوع الثاني هي 200 دج .

المطلوب: 1- أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم إيراد المؤسسة.

2- أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة.

3- أكتب البرنامجين بالشكل المصفوفي.

تمرين6: تنتج إحدى مؤسسات النجارة المنتوجات التالية:

1- الكراسي. 2- الطاولات. 3- الخزائن.

تمر هذه المنتوجات عبر ثلاث ورشات.

- الورشة الأولى طاقة العمل القصوى بها هي 200 ساعة عمل يوميا.

- الورشة الثانية طاقة العمل القصوى بها هي 140 ساعة عمل يوميا.

- الورشة الثالثة طاقة العمل القصوى بها هي 300 ساعة عمل يوميا.

تسعى المؤسسة لتحقيق أعظم ربح ممكن، و بهذا الصدد جمعت المعطيات التالية:

- إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول تتطلب 20 ساعة عمل في الورشة الأولى و 14 ساعة عمل في الورشة الثانية، 10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني تتطلب 18 ساعة عمل في الورشة الأولى و 20 ساعة عمل في الورشة الثانية و 5 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الثالث تتطلب 25 ساعة عمل في الورشة الأولى و 20 ساعة عمل في الورشة الثانية و 10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

- أن ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الأول هو 400 دج، و ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني هو 200 دج، و ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثالث هو أيضا 200 دج.

المطلوب: 1-شكل المسألة في نموذج خطي، وأكتبه بالشكل المصفوفي.

تمرين7: مؤسسة منجمية تستغل 3 مناجم بإحدى الولايات، إذ تقوم بتصفية المعدن و فصله الى نوعين: معدن خام قليل الجودة، و معدن خام عالي الجودة.
إذا علمت أن الطاقة الإنتاجية لكل نوع حسب كل منجم، وكذا تكلفة الإنتاج اليومية معروضة حسب الجدول التالي:

الطاقة المنجم	طاقة		التكلفة
	النوع الأول. طن/يوم	النوع2.طن/يوم	10^3دج/يوم
منجم1	4	4	20
منجم2	4	6	22
منجم3	6	1	18

و أنها إلتزمت مع زبائنها بتسليم 65 طن من النوع الأول و 54 طن من النوع الثاني عند نهاية كل أسبوع على أبعد تقدير.

المطلوب:

1-إيجاد البرنامج الخطي الذي من شأنه تحديد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع للوفاء بإلتزامات هذه الشركة بأقل تكلفة ممكنة.

2- كتابة البرنامج المحصل عليه بموجب السؤال1 بالشكل المصفوفي.

الفصل الثاني

حل البرنامج الخطي بيانيا.

نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة.
و يمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين:
- **الطريقة البيانية:** و هي شائعة الإستخدام فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرتين على الأكثر.
- **طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول:** و هي طريقة عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج.
وسوف نتطرق في هذا الفصل الى الطريقة البيانية، ونخصص الفصل الموالي لطريقة السمبليكس.
الطريقة البيانية كما سبقت الإشارة تستخدم فقط عندما يحتوي البرنامج على متغيرتين على الأكثر، و ذلك لصعوبة تصور المسألة على معلم يحتوي على أكثر من بعدين.
و يمكن إستخدام الطريقة البيانية سواء في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة.

أولا:حالة التعظيم: لحل برنامج التعظيم بهذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراجحات القيود الى معادلات.

ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة أ على معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها ***بالمستقيمات المولدة***، و هي قد تشكل لنا على المعلم مضلع متعدد الرؤوس.

ج- نشطب المناطق التي لاتحقق القيود و هي توجد الى يمين المستقيم في حالة كون القيد **أقل من** و الى يساره في حالة القيد **أكبر من**.

د- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود و هي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس.

هـ- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها الى الصفر، و نرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم **المستقيم** Δ.

و- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات المولدة بموجب الخطوة د، و تكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية(دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند سحبه الى الأعلى بشكل مواز لأصله، و هي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات مولدة.

ل- نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة و ذلك إما هندسيا، بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغيرة الأولى، و نمد من هذه النقطة أيضا مستقيما موازيا للمحور الأفقي فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة هي قيمة المتغيرة الثانية، أو جبريا بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرتين.

م- في حالة ما إذا لم نتمكن من تعيين هذه النقطة بدقة لوجود عدد من النقاط المتجاورة أو المتوازية التي يقترب منها المستقيم Δ، فإننا نوجد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط و نعوضها في دالة الهدف، و نأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها.

ن- نعوض قيمتي المتغيرتين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد آخر نقطة يصل إليها المستقيم ، بسبب عدم التمكن من تميزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، و نأخذ النقطة التي تعطي أعظم قيمة للدالة الإقتصادية.

مثال2-1: أوجد حل للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max} : Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \le 108 \\ 8x_2 + 6x_2 \le 96 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

أ- نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويل المتراجحات الى معادلات كما يلي:

$8x_1+6x_2=96$	$6x_1+9x_2=108$	$8x_1+2x_2=40$

ب- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما لنحصل على الشكل2-1 أدناه.

المستقيم1.

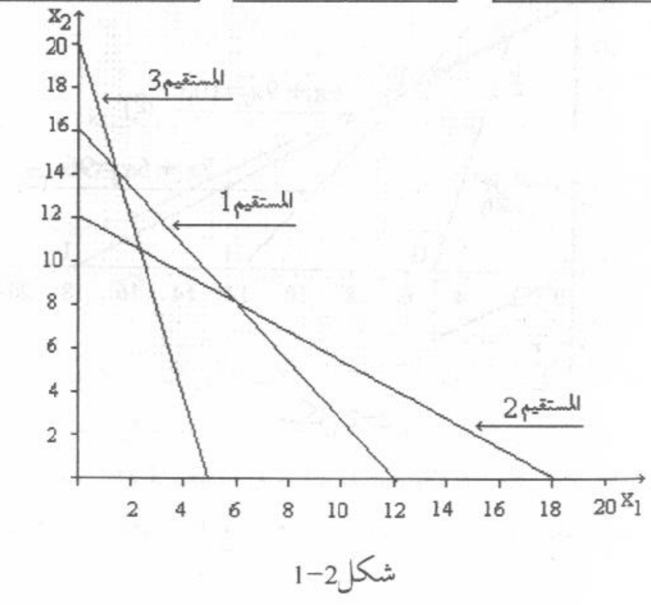
$8x_1+2x_2=40$	
x_1	x_2
0	20
5	0

المستقيم2.

$6x_1+9x_2=108$	
x_1	x_2
0	12
18	0

المستقيم3.

$8x_1+6x_2=96$	
x_1	x_2
0	16
12	0



شكل2-1

ج- على نفس المعلم نرسم المستقيم Δ و هو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها و هي : $Z=0$ أي :

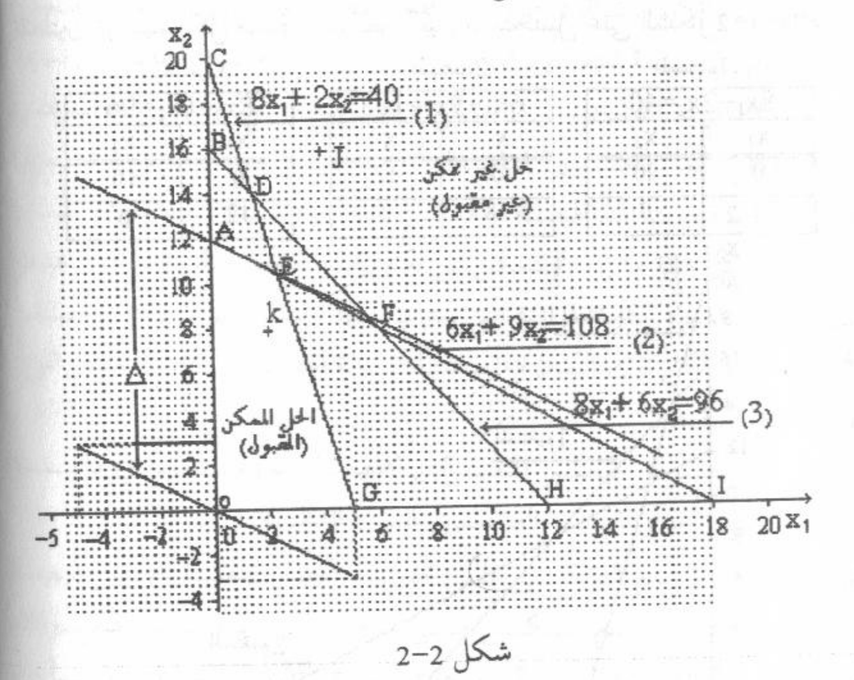
$$Z=100x_1 + 60x_2 = 0$$

المستقيم Δ يمر من النقطتين:

$100x_1+60x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-5
-3	5

و يكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر إلزاما بنقطة المبدأ.

بعد رسم المستقيمات المولدة نشطب المناطق التي لا تحقق جميع القيود كما يظهر في الشكل 2-2.



شكل 2-2

من خلال الشكل نلاحظ أن أية نقطة توجد الى يمين المستقيم (1) لاتحقق القيد، فلو أخذنا النقطة J على سبيل المثال حيث: $x_1=4$ و $x_2=16$ لوجدنا أن :

$$8x_1+2x_2=8\times4+2\times16=64>40$$

فالقيد إذن غير محقق على اليمين، لكن أية نقطة على يسار المستقيم (1) فهي تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة k على سبيل المثال حيث : $x_1=2$ و $x_2=8$ لوجدنا أن:

$$8x_1+2x_2=8\times2+2\times8=32<40$$

فالقيد إذن محقق، وظهر هناك فرق في الطاقة بقيمة 8 وحدات. و من جهة أخرى فإن أية نقطة على طول المستقيم (1) تحقق القيد بالتمام أي تحقق المساواة، و هي بذلك تستنفذ كل الطاقة المتاحة.

بتطبيق نفس المبدأ نجد أن كل المناطق الموجود على يمين المستقيمات (1) ، (2) و(3) لا تحقق القيود، بينما كل المناطق التي هي على يسار كل مستقيم فهي تحقق القيد، و بمعنى آخر فإن أية نقطة على المستقيم (1) أو على يساره تحقق متراجحة القيد و أي نقطة على يمينه لاتحقق تلك المتراجحة، و أية نقطة على المستقيم (2) أوعلى يساره تحقق متراجحة القيد و أية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وبالمثل فإن أية نقطة على المستقيم (3) أو على يساره تحقق متراجحة القيد و أية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة.

كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي الى يسار المحور العمودي مرفوضة و بالتالي فإنه لاتوجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا و تشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة OAEG أي (المنطقة غير المشطبة) و تسمى هذه المنطقة **بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.**

عند تحريك المستقيم Δ الى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقطة E و بالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و (2)، إذ نجد قيمة المتغيرين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي إنطلاقا من النقطة E فنجد قيمة x_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، و إما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

مستقيم (1) $8x_1 + 2x_2 = 40$

مستقيم (2) $6x_1 + 9x_2 = 108$

بضرب معادلة المستقيم (1) في 3 و معادلة المستقيم (2) في -4 نجد:

$$24x_1 + 6x_2 = 120$$
$$-24x_1 - 36x_2 = -432$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-30x_2 = -312$$

و منه يكون:

$$x_2 = \frac{-312}{-30} = 10.4$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_1=2.4$

و بالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما:

$x_1 = 2.4$ $x_2 = 10.4$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $8 \times 2.4 + 2 \times 10.4 = 40$ قيد محقق تماما.

القيد الثاني: $6 \times 2.4 + 9 \times 10.4 = 108$ قيد محقق تماما.

القيد الثالث: $8 \times 2.4 + 6 \times 10.4 = 81.6 < 96$ قيد محقق و تبقى طاقة غير مستعملة قيمتها 14.4 ساعة عمل.

و لمعرفة القيمة العظمى للدالة الإقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 2.4 + 60 \times 10.4 = 864$$

و هي أعلى قيمة للدالة الإقتصادية، و لا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة للدالة الإقتصادية و تحقق في نفس الوقت جميع القيود.

نظرية: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

ثانيا: حالة التدنئة: لإيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية في حالة التدنئة، نتبع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراجحات القيود الى معادلات.

ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة أ على معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها ***بالمستقيمات المولدة.***

ج- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود و هي توجد الى يسار المستقيمات في حالة كون القيد **أكبر من** و الى يمينه في حالة **القيد أقل من.**

د- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود و هي في الغالب توجد الى يمين المستقيمات المولدة، و تسمى بمنطقة الحلول الممكنة أو حيز الإمكان.

هـ- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها الى الصفر، و نرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ،نسميه **المستقيم Δ.**

و- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إتجاه رؤوس المنطقة التي تحقق القيود المحصل عليها من المستقيمات المولدة في الخطوة د، و تكون النقطة التي تحقق أقل قيمة للدالة الإقتصادية-دالة الهدف- هي أول نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند تحريكه الى الأعلى بصفة موازية لأصله، و هي نقطةحاصلة من نقاطع عدة مستقيمات.

ل- نوجد إحداثيات هذه النقطة إما بـالحل المشترك أو بالإسقاط الهندسي، فنحصل بذلك على قيمة المتغيرتين اللتين تدنيان الدالة الإقتصادية.

م- نعوض قيم المتغيرات المحصل عليها في دالة الهدف فنحصل على القيمة الدنيا لها.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد أول نقطة يصل إليها المستقيم ، بسبب عدم التمكن من تمييزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، و نأخذ النقطة التي تعطي أقل قيمة للدالة الإقتصادية.

مثال2-2: أوجد حل أمثل للبرنامج التالي بإستعمال الطريقة البيانية:

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

الحل:

أ- المستقيمات المولدة المحصل عليها هي:

$x_2=2$	$6x_1+x_2=6$	$3x_1+2x_2=6$

المستقيم Δ

$Z=10x_1+30x_2=0$	
x_1	x_2
3	-1
3-	1

المستقيم2

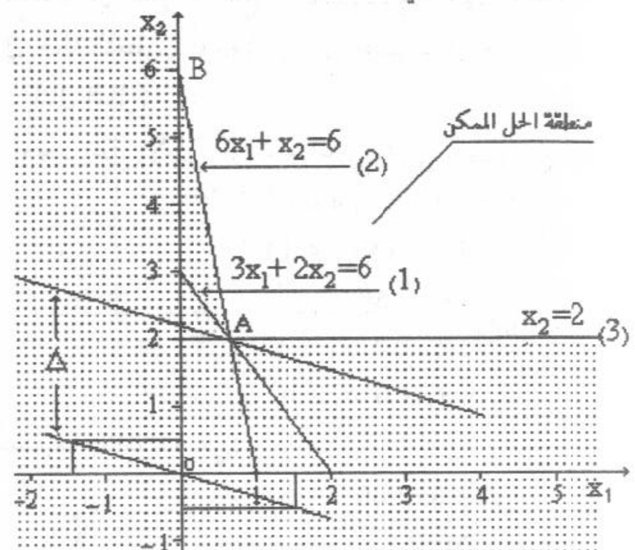
$6x_1+x_2=6$	
x_1	x_2
0	6
1	0

المستقيم1

$3x_1+2x_2=6$	
x_1	x_2
0	3
2	0

نقوم برسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ونحدد منطقة الحل المقبول، وهي المنطقة غير المشطبة في الشكل2-3 فتكون أية نقطة على الخط 2 أو الى يمينه غير المشطب تحقق جميع القيود، و أية نقطة على الخط 3 أو الى أعلاه غير المشطب تحقق جميع القيود، غير أنه بالنسبة للخط 2 فإنه لاتوجد سوى نقطة واحدة فقط هي التي تحقق جميع القيود (شكل2-3)، و عليه يكون الحل في

أحد الرأسين إما A أو B ، غير أنه عند تحريك تحريك المستقيم Δ الى أعلى نجد أن أول رأس يصل إليه في منطقة الحل المقبول هو A و بالتال ي فقيم المتغيرتي ن اللتين تحققان أدنى قيمة للدالة الإقتصادية هي نقطة التقاطع بين المستقيمات الثلاثة، و لإيجادها يكفي أن ننزل من هذه النقطة شاقولا على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 المقابلة



شكل2-3.

و نمد خط موازي للمحور x_1 فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة تحدد قيمة x_2 ، أو أن نحل معادلات هذه المستقيمات حلا مشتركا، و عليه نجد القيمتين التاليتين:

$x_2= 2$ $\qquad$ $x_1= 2/3=0.66$

و هما قيمتان تجعلان الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها و في نفس الوقت تجعلان كل القيود محققة، حيث نجد القيمة العظمى للدالة الإقتصادية و هي:

$$Z=10x1+30x2=10(0.66)+30(2)=\mathbf{66.66}$$

ثالثا: حالات خاصة في الحل البياني: يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء إيجاد الحل بالطريقة البيانية منها ما يلي:

1- تعدد الحلول: يمكن أحيانا أن نصادف أكثر من حل واحد، و هي الحالة المسماة بتعدد الحلول، و فيها نجد على الأقل أن رأسين من رؤوس مضلع حيز الإمكان يتماسان في آن واحد مع المستقيم Δ بحيث يكونا آخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنئة، كما يوضح ذلك المثال التالي:

مثال2-3: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

معادلات المستقيمات المولدة هي:

$4x_1+8x_2=40$

$x_1=6$

$x_2=4$

المستقييم الأول يرسم من خلال النقطتين التاليتين:

الأولى: $x_1=0$, $x_2=5$

الثانية: $x_1=10$, $x_2=0$

يلاحظ من خلال الشكل 2-4 أنه عند تحريك المستقيم Δ الى اليمين فإنه يلتقي مع رأسي منطقة الحل الممكن B و C في نفس الوقت، و بالتالي فإن كلا النقطتين تعطيان حلا أمثلا للدالة الإقتصادية.

و يمكن التأكد من ذلك بالتعويض في هذه الدالة.

النقطة B تعطي : $x_1=2$, $x_2=4$

شكل2-4.

و قيمة دالة الهدف عندها هي: $Z=2x_1+4x_2=2 \times 2+4 \times 4=20$

النقطة C تعطي : $x_1=6$, $x_2=2$

و قيمة دالة الهدف عندها هي: $Z=2x_1+4x_2=2 \times 6+4 \times 2=20$

و يلاحظ أن النقطتين أعطيتا نفس القيمة للدالة الإقتصادية.

و الواقع أنه ليست هتين النقطتين فقط تعطيان أكبر قيمة للدالة الإقتصادية، لكن أية نقطة أخرى موجودة على طول المستقيم BC. فلو أخذنا النقطة E على سبيل المثال حيث:

$x_1=4$, $x_2=3$ فإن قيمة دالة الهدف هي:

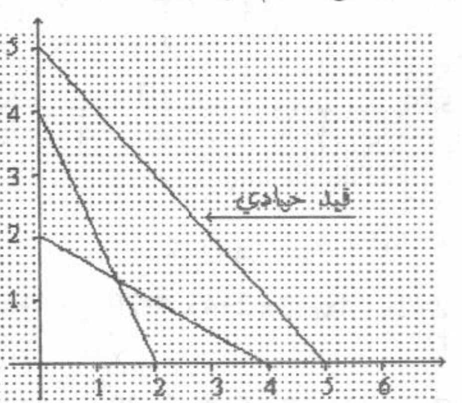
$Z=2x_1+4x_2=20$

و هي نفس القيمة المحصل عليها عند رأسي منطقة الحل الممكن.

تفيد هذه الحالة المُسيِّر في أنها توفر له المرونة في إتخاذ القرار لكونها تتيح له بدائل عديدة.

تصادف هذه الحالة خاصة عندما يكون المستقيم Δ موازيا لأحد المستقيمات المولدة في سقف منطقة الحل الممكن في إتجاه اليمين في حالة التعظيم أو في أرضية منطقة الحل الممكن في إتجاه اليسار في حالة التدنئة، حينئذ يكون ميل هذا المستقيم و ميل المستقيم Δ متساويان.

2- **حالة حياد أحد القيود:** عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة، و حينها يكون هذا القيد حياديا تماما، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام، و تظهر هذه الحالة كما في الشكل 2-5.



شكل2-5.

3- **حالة إستحالة الحل:** هي الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لاتتحقق لنا أية منطقة للحل الأمثل، كما في المثال التالي:

مثال2-4:

$$MaxZ = 20x_1 + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \leq 10\\ 4x_1 + 6x_2 \geq 20\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

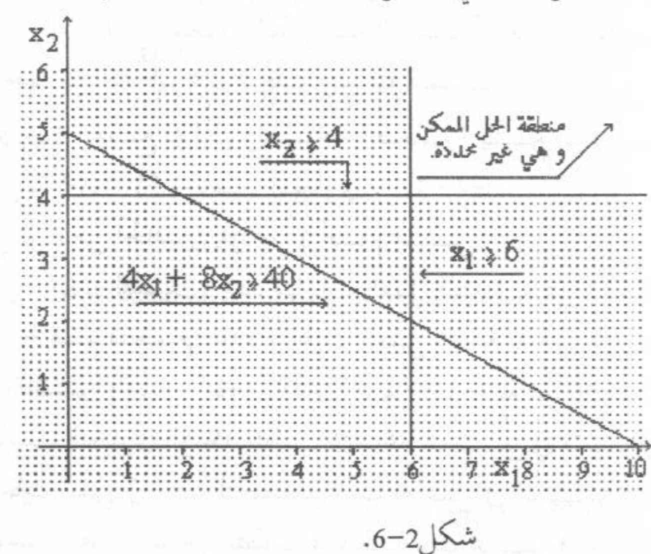
4- **لا نهائية الحالة الإقتصادية:** في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أوتساوي مقدار ثابت، غير أنه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود، فتكون هذه الأخيرة كلها أكبر أو تساوي في حالة التعظيم، و هذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لانهائية، و لا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي و محدد للدالة.

مثال2-5: حدد منطقة الحل الممكن للبرنامج التالي. ماذا تستنتج.

$$MaxZ = 2x_1 + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases}4x_1 + 8x_2 \geq 40\\ x_1 \geq 6\\ x_2 \geq 4\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

بإستعمال الطريقة البيانية، نلاحظ من خلال الشكل 2-6 أنه توجد منطقة لانهائية تحقق دالة الهدف، فأية قيمة في إتجاه السهم تحقق دالة الهدف، وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.



شكل2-6.

تمارين

تمرين1: مؤسسة صناعية تنتج أجهزة الطبخ الكهربائية وأجهزة الطبخ الغازية، بغية معرفة الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أعظم ربح ممكن قامت بجمع البيانات التالية:

1-المنتوجان يمران عبر ورشتين أساسيتين، هما ورشة التركيب يعمل بها 5 عمال، و ورشة الإعداد النهائي و يعمل بها 4 عمال، طاقة العمل اليومي القصوى لكل عامل هي 8 ساعات.

2- أن المنتوج الأول يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و2 ساعة عمل في الورشة الثانية، بينما المنتوج الثاني يتطلب 2ساعة عمل في الورشة الأولى و4ساعات عمل في الورشة الثانية.

3- سعر المنتوج الواحد من النوع الأول هو 500 دج ويكلف 200 دج وسعر المنتوج الواحد من النوع الثاني هو 300 دج و يكلف 100دج.

المطلوب: 1- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة.

2- بإستعمال الطريقة البيانية، أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتعظيم ربح المؤسسة.

تمرين2 : مصنع للإلكترونيات الصغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسبة هما: 1- الحاسب التجاري. 2- الحاسب العلمي.

كل نوع من الحاسبين يمر عبر 3 أقسام هي:

- قسم التسليك: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 55 ساعة عمل يوميا.
- قسم التجميع: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 72 ساعة عمل يوميا.
- قسم الإختبار: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 20 ساعات عمل يوميا.

الحاسب التجاري الواحد يتطلب 2 ساعة عمل في قسم التسليك و 12 ساعات عمل في قسم التجميع و 2 ساعة عمل في قسم الإختبار.

الحاسب العلمي الواحد يتطلب 4 ساعات عمل في قسم التسليك، 6 ساعات عمل في قسم التجميع، و 4 ساعة عمل في قسم الإختبار.

إذا كان ربح الحاسب التجاري الواحد هو 25 دينار و ربح الحاسب العلمي الواحد هو 30 دينار. **المطلوب:**

1- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع.

2- أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين و التي تجعل الربح في أعظم قيمة باستخدام الطريقة البيانية.

3- حدد الطاقات غير المستغلة في كل قسم إن وجدت.

تمرين3: أوجد حل للتمرين رقم5 من سلسلة تمارين الفصل السابق باستعمال الطريقة البيانية.

تمرين 4: بإستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التعظيم التالية:

$$\text{Max}: Z = x_1 + x_2 \qquad s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

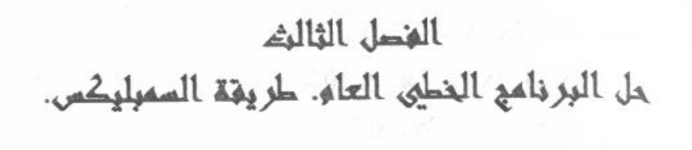
$$\text{Max}: Z = 10x_1 + 20x_2 \qquad s/c\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Max}: Z = 150x_1 + 200x_2 \qquad s/c\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \le 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \le 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \le 550 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Max}: Z = 4x_1 + 3x_2 \qquad s/c\begin{cases} x_1 + 3.5x_2 \le 9 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

تمرين5: بإستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التدنئة التالية إن أمكن:

$\text{Min}: Z = 20x_1 + 30x_2$	$\text{Min}: Z = 25x_1 + 30x_2$	$\text{Min}: Z = 80x_1 + 100x_2$
$s/c\begin{cases} 2x_1 + 14x_2 \ge 4 \\ 16x_1 + 10x_2 \ge 8 \\ 3x_1 + 9x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$s/c\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \ge 1 \\ 8x_1 + 5x_2 \ge 3 \\ 6x_1 + 9x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$s/c\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \ge 24 \\ 10x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ 6x_1 + 12x_2 \ge 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$



الفصل الثالث
حل البرنامج الخطي العام. طريقة السمبليكس.

طريقة السمبلكس أوطريقة الجداول كما تسمى أحيانا تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي إثنين أو أكثر من ذلك، و هي تعتمد على خوارزمية تسمى **بخوارزمية السمبليكس**. قبل الخوض في إيجاد الحل بهذه الطريقة ينبغي التعرف على بعض أنواع الصيغ الخطية وبعض المصطلحات، ومن ذلك مايلي:

أولا: الصيغة القانونية للبرنامج الخطي: هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية القانونية وهي حسب الحالة كما يلي:

1- **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

أ- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم.

ب- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.

ج- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max : Z = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq O \end{cases}$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت.

مثال3-1: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية:

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + \qquad 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2- **حالة التدنئة:** حتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

أ- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة.

ب- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.

ج- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$\text{Min}: Z = C'X$$

$$s/c\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq O \end{cases}$$

مثال3-2: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية:

$$\text{Min}: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 + \qquad 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثانيا: الصيغة المختلطة: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة، و القيود مختلطة بحيث تحتوي على متراجحات "أكبر من" و "أصغر من" و معادلات، كل هذه الحالات معا أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

مثال3-3: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته المختلطة:

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + \qquad 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثالثا: الصيغة النموذجية: و فيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة.

تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها الى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

رابعا: إيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول:

لإيجاد الصيغة النموذجية في حالة كون القيد عبارة عن متراجحة لابد من إدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج ، بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود الى معادلات، تسمى هذه المتغيرات ***بمتغيرات الفجوة*** لأنها تسد

الفرق **"الفجوة"** الموجودة بين طرفي المتراجحة، ويتم ذلك حسب الحالات كما يلي:

1- الحالة الأولى: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+a_{mn}x_n \le b_m$$

لتحويل القيد الى معادلة " متساوية" ينبغي أن نضيف الى الطرف الأيسر متغيرة صورية تسمى متغيرة الفجوة ، نرمز لها بالرمز x_j^e حيث j ترتيب المتغيرة و e ترمز الى الفجوة (écart) ، و عليه فإن القيد أعلاه ليصبح عبارة عن معادلة فإننا نكتبه كما يلي:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+1}^e = b_m$$

حيث x_{n+1}^e أضيفت الى الطرف الأيسر لترجحه فيصبح الطرف الأيسر مساويا للطرف الأيمن، و بمعنى آخر أضيفت لتغلق الفجوة بين الطرفين، لذلك سميت بمتغيرة الفجوة.

و تمثل متغيرات الفجوة الطاقات غير المستعملة أو الطاقات العاطلة، و هي متغيرات يجب أن تكون أيضا غير سالبة.

تنبغي الإشارة الى أنه عند إدخال متغيرة الفجوة الى القيد فإنه ينبغي إدخالها أيضا على دالة الهدف لكن بمعامل يساوي الصفر على إعتبار أنها خارج النظام. وتسمى مصفوفة معاملات القيود المحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة ***بمصفوفة الحل الأساسي الأول***.

مثال3-4: أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج التالي:

$$Max: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 10 \\ x_1 + \qquad 3x_3 \le 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \le 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن كل القيود عبارة عن متراجحات و بالتالي فينبغي إضافة الى كل منها متغيرة للفجوة على النحو التالي:

القيد الأول يكتب كما يلي: $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10$

القيد الثاني يكتب كما يلي: $x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7$

القيد الثالث يكتب كما يلي: $x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25$

لاحظ أننا ميزنا بين متغيرات الفجوة المضافة فأعطيناها ترتيبا متزايدا و مغايرا للمتغيرات الحقيقية ، وهي غير متساوية في الغالب لعدم تساوي الطاقات غير المستعملة في كل قيد.

و عليه يصبح البرنامج بالصيغة القانونية على النحو التالي:

$$Max: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10 \\ x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4^e \ge 0, x_5^e \ge 0, x_6^e \ge 0 \end{cases}$$

و يجب أن تضاف متغيرات الفجوة بالشكل الذي يضمن الحصول على **مصفوفة أحادية** ضمن مصفوفة معاملات القيود، كما يظهر في المصفوفة أدناه:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^e & x_5^e & x_6^e \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 3 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 17 & 15 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

تسمى هذه **المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأول**، و هي تتضمن مصفوفة أحادية كما تظهره الأعمدة 4 ، 5 و 6، ولايشترط أن تكون هذه الأعمدة متحاذية، و هي ظرورية، إذ تعتبر الصيغة القانونية و من ثم المصفوفة الأحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود أولى خطوات البحث عن الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

2- الحالة الثانية: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

و هي الحالة الغالبة في حالة التدنئة.

لتحويل القيد الى الشكل النموذجي أي تحويله الى معادلة "متساوية"، ينبغي أن نطرح من الطرف الأيسر متغيرة صورية هي **متغيرة الفجوة** كما جرت العملية في الحالة الأولى، و عليه يصبح القيد المشار إليه أعلاه كما يلي:

$$\boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n - x_{n+1}^e = b_m}$$

يلاحظ أن معامل متغيرة الفجوة يأخذ إشارة سالبة و بالتالي فهو لايتيح لنا إمكانية الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، لذلك يتم الإستعانة بمتغيرات أخرى تسمى ***بالمتغيرات الإصطناعية*** و يفترض أن تكون قيمتها معدومة و معاملها يساوي +1 و بالتالي فهي **مجرد متغيرات مساعدة**، و نميزها عن متغيرات الفجوة بالحرف a فنكتبها على الشكل x_j^a، **حيث الحرف a يرمز الى أنها إصطناعية أي أول حرف من مصطلح artificielle**. كما ينبغي إجراء تغييرات على دالة الهدف، فتضاف متغيرات الفجوة إليها بمعاملات صفرية، **أما المتغيرات الإصطناعية** فتضاف إليها على أن تأخذ معاملات يفترض أن تكون كبيرة جدا **بإشارة سالبة** نرمز لها بـ M إذا كانت دالة الهدف في **حالة تعظيم**، وبإشارة **موجبة** إذا كانت دالة الهدف في **حالة تدنئة**. و نجري مجموعة من التحويلات الأخرى عليها كما يوضحه المثال التالي:

مثال3-5: أوجد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج التالي:

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 15x_2$$
$$s/c \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد الصيغة القانونية و مصفوفة الحل الأساسي الأول نجري التحويلات التالية على النظام:

القيد الأول يكتب كما يلي: $7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14$

القيد الثاني يكتب كما يلي: $8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16$

القيد الثالث يكتب كما يلي: $2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10$

أما دالة الهدف فتكتب كما يلي:

$$Max: Z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a$$

أو:

$$\boxed{Max: Z = 20x_1 + 15x_2 - Mx_4^a - Mx_7^a}$$

يتم تعويض قيم x_4^a و x_7^a في دالة الهدف بقيمهما المستخرجة من القيدين الأول والثالث على النحو التالي:

من القيد الأول نجد: $x_4^a = 14 - 7x_1 - 2x_2 + x_3^e$

من القيد الثالث نجد: $x_7^a = 10 - 2x_1 - 5x_2 + x_6^e$

بالتعويض في دالة الهدف و فك الأقواس وضم الحدود المتشابهة نصل الى النظام التالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} Max: Z = (20+9M)x_1 + (15+7M)x_2 - Mx_3^e - Mx_6^e - 24M \\ s/c \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10 \end{cases} \end{array}}$$

و تكون مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج كما يلي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_1 & x_3^e & x_4^a & x_5^e & x_6^e & x_7^a \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوي على عدد من الأعمدة تشكل عند محاذاتها مصفوفة أحادية ، (الأعمدة 4، 5 و 7) و هو مبرر التحويلات التي تم إجراءها على النظام.

خامسا: إيجاد الحل في حالة التعظيم : لإيجاد الحل بطريقة الجداول" السمبليكس" في حالة التعظيم يتم إتباع الخوارزمية التالية:

1- نبحث عن الصيغة النموذجية، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.

2- نرتب البيانات في جدول هو **الجدول 1** و يسمى **بجدول الحل الأساسي الأول**. فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس " رئيسية" أو متغيرات داخل الأساس (قيمها عند بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابت) ، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة). وتكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة.

فإذا كان البرنامج الخطي على النحو:

$$Max: Z = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي:

$$Max : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3^e = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4^e = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5^e = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0 \end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

		x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	
متغيرات →	x_3^e	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1	عمود ←
	x_4^e	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2	
الأساس	x_5^e	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3	الثوابت
ΔZ		c_1	c_2	0	0	0	0	قيمة الدالة ←

جدول3-1

لاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الأول من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة 1 من أعمدة المصفوفة الأحادية، و تكون في جدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات إصطناعية أو هما معا، و في المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، و تحل محلها متغيرات أخرى.

و في هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير (عمود الثوابت)، أي: $x_3^e = b_1 , x_4^e = b_2 , x_5^e = b_3$ ، أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة أي: Z=0 و هي تظهر في آخر خانة من الجدول، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

3- إنطلاقا من الجدول1 نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني "الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك **عنصر الإرتكاز**، المعرف لاحقا.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أكبر معامل في الدالة الإقتصادية، أي أكبر قيمة في السطر الأخير (ΔZ)، (وهي المتغيرة التي تعطي أكبر عائد للدالة الإقتصادية)، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس **بعمود عنصر الإرتكاز** أو العمود الأمثل.
- المتغيرة التي تخرج من الإساس ، هي المقابلة **لأصغر نسبة موجبة** ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الإرتكاز. يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر عنصر الإرتكاز.
- **عنصر الإرتكاز** هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الإرتكاز مع سطر عنصر الإرتكاز.

4- جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:

- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس و ذلك في العمود الأول من الجدول أي عمود متغيرات الأساس.
- يجري تحويل عمود عنصر الإرتكاز الى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الإرتكاز الى القيمة1 و عناصر العمود الأخرى الى قيم معدومة.
- يتم تحويل سطر عنصر الإرتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الإرتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما بإستخدام طريقة التركيبات الخطية أو بإستخدام قاعدة المستطيلات و هي على النحو التالي:

إذا كانت عناصر جدول الحل الأساسي كما يلي:

عنصر الإرتكاز ←	ⓐ		b		جدول1
	c		d		

فإنه يتم إجراء التحويلات للإنتقال الى جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

يتم تقسيم سطر عنصر الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، بحيث يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a و تتحول بقية عناصر عمود عنصر الإرتكاز الى أصفار فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر. أما القيمة التي تحل مكان d فتحسب كما يلي:

$$d-\frac{b\times c}{a}$$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى ، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الإرتكاز و عمود عنصر الإرتكاز مقسوما على قيمة عنصر الإرتكاز. و تصبح عناصر الجدول الموالي كما يلي:

	1		b/a		جدول 2
	0		$d-\frac{b\times c}{a}$		

و بالمثل إذا كانت معطيات الجدول كما يلي:

	d		c		جدول1
	b		ⓐ		← عنصر الإرتكاز

فإن الجدول الموالي يصبح كما يلي:

	$d-\frac{b\times c}{a}$		0		جدول 2
	b/a		1		

5- نستمر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية الى الخطوة 3 ، و هذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الإقتصادية (السطر الأخير) سالبة أو معدومة ، و **حينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل** وفيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي الى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل وبقية المتغيرات تكون معدومة، أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال3-6: أوجد حل للبرنامج الخطي التالي:

$$Max : Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c\begin{cases}8x_1 + 2x_2 \le 40\\ 6x_1 + 9x_2 \le 108\\ 8x_1 + 6x_2 \le 96\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

-نوجد أولا الصيغة النموذجية، و هي كما يلي:

$$Max : Z = 100x_1 + 60x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$\begin{cases}8x_1 + 2x_2 + x_3^e = 40\\ 6x_1 + 9x_2 + x_4^e = 108\\ 8x_1 + 6x_2 + x_5^e = 96\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3^e \ge 0, x_4^e \ge 0, x_5^e\end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	النسبة
x_3^e	**8**	2	1	0	0	40	5
x_4^e	6	9	0	1	0	108	18
x_5^e	8	6	0	0	1	96	12
ΔZ	100	60	0	0	0	0	

جدول3-2.

2- المتغيرة التي تدخل الأساس: هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر الدالة الإقتصادية وبالتالي فهي المقابلة للقيمة 100 أي x_1. وبالتالي فعمود عنصر الإرتكاز هو العمود الأول.

3- المتغيرة التي تخرج من الأساس: هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين النسب الحاصلة من جراء تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الإرتكاز، و هي 5 و عليه فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_3^e.

و يكون عنصر الإرتكاز هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود عنصر الإرتكاز مع سطر عنصر الإرتكاز، أي هو القيمة 8 المؤطرة في الجدول أعلاه.

نجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي التالي:

-نقسم سطر عنصر الإرتكاز على عنصر الإرتكاز فيصبح هذا السطر على وجه الترتيب كما يلي:

1 1/4 1/8 0 0 5

-يتحول عمود عنصر الإرتكاز الى عمود أحادي، أي أن قيمة عنصر الإرتكاز تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه، أما بقية عناصر العمود فتتحول الى أصفار.

-بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس تبقى أحادية.

-بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات، و على سبيل المثال، القيم 9 في الجدول 3-2 تحول على النحو التالي:

$$9 - \frac{2 \times 6}{8} = \frac{15}{2}$$

و القيمة 96 في عمود الثوابت من الجدول 3-2 تصبح على النحو:

$$96 - \frac{40 \times 8}{8} = 56$$

و القيمة 0 التي تعبر عن قيمة الدالة الإقتصادية بالقيمة المطلقة الموجودة في آخر خانة من الجدول تصبح كما يلي:

$$0 - \frac{40 \times 100}{8} = -500$$

و بالمثل يتم حساب بقية العناصر، والنتائج معروضة في الجدول التالي:

	x_1	x_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	B	النسبة
x_1	1	1/4	1/8	0	0	5	20
x^e_4	0	**15/2**	-3/4	1	0	78	10.4
x^e_5	0	4	-1	0	1	56	14
ΔZ	0	35	-25/2	0	0	**-500**	

جدول3-3.

يلاحظ أن قيمة الدالة الإقتصادية تحسنت فانتقلت قيمتها من 0 الى 500، كما دخلت متغيرة حقيقية الى الأساس و أصبحت قيم المتغيرات كما يلي:

$x_1 = 5$
$x^e_4 = 78$
$x^e_5 = 56$

أما بقية المتغيرات غير الموجود في عمود متغيرات الأساس فهي تساوي الى الصفر، أي:

$x_2 = 0$
$x^e_3 = 0$

أما قيمة دالة الهدف فتساوي **| 500- | أي 500.**

و يمكن التأكد من صحة نتيجة دالة الهدف بالتعويض في الدالة فنجدها كما يلي:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 5 + 60 \times 0 = 500$$

و هي نفس القيمة التي تظهر في آخر خانة من عمود الثوابت، و الفرق فقط هو أنها تأخذ الإشارة السالبة في الجدول.

السؤال المطروح الآن، هو هل أننا توصلنا الى الحل الأمثل؟. والجواب هو أنه ما دامت هناك قيم أكبر من الصفر في السطر الأخير من الجدول–سطر معاملات الدالة– فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد و ينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه. ونعود من جديد فنختار عمود المتغيرة التي تدخل الأساس و هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر معاملات الدالة–السطر الأخير– من الجدول. و عليه فإن المتغيرة x_2 هي التي تدخل الأساس بإعتبارها تقابل أكبر قيمة و هي 35، و يتحدد بذلك عمود عنصر الإرتكاز. بتقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الإرتكاز يتحدد لنا سطر عنصر الإرتكاز و هو السطر الثاني، وتتعين بذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس وهي x^e_4. ويكون عنصر الإرتكاز هو **15/2** ، و نجري تحويلات مشابهة لتحويلات المرحلة السابقة و هي:

- نقسم سطر عنصر الإرتكاز على عنصر الإرتكاز.
- نحول عمود عنصر الإرتكاز الى عمود أحادي.
- نبقي بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس أحادية.
- نجري تحويلات بقية العناصر بطريقة المستطيلات.

و نحصل بذلك على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B
x_1	1	0	3/20	-1/30	0	12/5
x_2	0	1	-1/10	2/15	0	52/5
x_5^e	0	0	-3/15	-8/15	1	72/5
ΔZ	0	0	-9	-14/3	0	**-864**

جدول3-4.

كل معاملات الدالة الإقتصادية أي السطر الأخير أصبحت سالبة، و بالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

و تكون النتائج المحصل عليها هي:

$$x_1= 12/5=2.4$$
$$x_2= 52/5=10.4$$
$$x_5^e=72/5=14.4$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

و نلاحظ أن الدالة الإقتصادية تحسنت وانتقلت قيمتها من 500 الى 864. و يمكن إثبات ذلك بالتعويض في الدالة كما وردت حيث نجد:

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100\frac{12}{5} + 60\frac{52}{5} = 864$$

و بالتالي فإن قيم المتغيرات التي تجعل الدالة في أعظم قيمة لها هي:

$$x_1=2.4$$
$$x_2=10.4$$

كما أن هذه النتائج تحقق القيدين الأول و الثاني تماما، أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة عاطلة قيمتها 14.4 و تعبرها عنها متغيرة الفجوة $x_5^e=14.4$ ، كما يمكن إثبات ذلك من خلال التعويض في القيود:

القيد الأول: $8x_1 + 2x_2 \le 40 \Rightarrow 8\times 2.4 + 2\times 10.4 = 40$

أي أن القيد محقق تماما.

القيد الثاني: $6x_1 + 9x_2 \le 108 \Rightarrow 6\times 2.4 + 9\times 10.4 = 108$

أي أن القيد محقق تماما.

القيد الثالث: $8x_1 + 6x_2 \le 96 \Rightarrow 8\times 2.4 + 6\times 10.4 = 81.6$

أي أن القيد غير محقق تماما، و تبقى طاقة غير مستغلة قيمتها 14.4 و هي قيمة متغيرة الفجوة المضافة أي $x_5^e = 14.4$ ، كما تظهر في الجدول3-4.

للتذكير فإن القيمة العظمى للدالة الإقتصادية هي: **Z=864** وهي نفس القيمة التي وجدناها بإستخدام الطريقة البيانية (انظر حل المثال 2-1 في الفصل السابق).

سادسا: إيجاد الحل في حالة التدنئة: لإيجاد الحل بطريقة الجداول" السمبليكس" في حالة التدنئة يتم إتباع الخوارزمية التالية:

1- نبحث عن الصيغة النموذجية، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية، و حيث أن القيود تكون في الغالب في حالة أكبر أو تساوي ، لذلك نستعمل متغيرات الفجوة في إيجاد المساواة و المتغيرات الإصطناعية في إيجاد المصفوفة الأحادية.

2- نرتب البيانات في جدول هو الجدول 1 و يسمى بجدول الحل الأساسي الأول، فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس " رئيسية" في حالة ما إذا كانت معاملاتها 1+ أو تكون المتغيرات الإصطناعية هي متغيرات أساس و هي الحالة الأكثر مصادفة، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها في هذا الجدول

متغيرات خارج الأساس. و تكون أيضا قيمة دالة الهدف معدومة، و ينبغي إدخال تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية منها و ذلك حسب التوضيح التالي:

إذا كان البرنامج الخطي على النحو :

$$\text{Min}: Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0,$$
$$x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0$$

و نجري التحويلات التالية على دالة الهدف:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

حيث M هو معامل المتغيرات الإصطناعية و يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة موجبة، وهذا حتى تكون المتغيرات المصاحبة له من أولى المتغيرات التي تخرج من الأساس، لأن مقتضى تصغير الدالة يتطلب إخراج المتغيرات ذات المعاملات الأكبر، و هو ما تعمل على أساسه خوارزمية الحل.

من القيود المعدلة لدينا نستخرج قيم المتغيرات الإصطناعية بدلالة بقية المتغيرات و هي:

$$x_4^a = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_5^e$$
$$x_8^a = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_7^e$$

بتعويض قيم هذه المتغيرات في الدالة الإقتصادية المحولة و هي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

و جمع الحدود المتشابهة نحصل على الشكل الجديد للدالة الإقتصادية و هي:

$$Z = [c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + M(b_1 + b_2 + b_3)$$

بمساواة الدالة الى الصفر و هي نقطة الإنطلاق دائما، نجد:

$$\boxed{[c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -M(b_1 + b_2 + b_3)}$$

و يكون الجدول الأساسي الأول كما يلي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
x_6^a	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
x_8^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3
ΔZ	$c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M$	$c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-M(b_1 + b_2 + b_3)$

جدول3-5.

في هذا الجدول أيضا تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة في العمود الأخير الى اليمين، و نلاحظ أن المتغيرات الإصطناعية تكون إجباريا داخل الأساس لأن كل

متغيرات الأساس يجب أن تشمل عمود يشكل أحد أعمدة المصفوفة الأحادية الواجب توفرها في مصفوفة جدول الحل الأساسي الأول، و لاشك أن السبب الرئيسي لإضافة المتغيرات الإصطناعية هو توفير هذا الشرط.

3- إنطلاقا من الجدول1 نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الموالي وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك عنصر الإرتكاز.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أصغر معامل سالب في الدالة الإقتصادية أي أصغر قيمة سالبة في السطر الأخير من الجدول، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس بعمود عنصر الإرتكاز.

- المتغيرة التي تخرج من الأساس ، هي المقابلة لأصغر **نسبة موجبة** ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الإرتكاز. يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر عنصر الإرتكاز.

- عنصر الإرتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الإرتكاز مع سطر عنصر الإرتكاز.

4- جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:

- نستبدل المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل و ذلك في العمود الأول أي عمود متغيرات الأساس.

- يجري تحويل عمود عنصر الإرتكاز الى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الإرتكاز الى القيمة1 و عناصر العمود الأخرى الى قيم معدومة.

- يتم تحويل سطر عنصر الإرتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الإرتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما بإستخدام طريقة التركيبات الخطية أو بإستخدام قاعدة المستطيلات كما تم ذلك في حالة التعظيم على النحو التالي:

عنصر الإرتكاز →	ⓐ		b		جدول1
	c		d		

يتم تقسيم سطر عنصر الإرتكاز على عنصر الإرتكاز. يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a . تتحول بقية عناصر عمود عنصر الإرتكاز الى أصفار فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر، أما القيمة التي تحل مكان d فتحسب كما يلي:

$$d - \frac{b \times c}{a}$$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى ، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الإرتكاز و عمود عنصر الإرتكاز مقسوم على قيمة عنصر الإرتكاز. و تصبح عناصر الجدول الثاني كما يلي:

	1		b/a		جدول 2
	....	.....	....	.....	
	0	.....	$d - \frac{b \times c}{a}$	.....	

5- نستمر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية الى الخطوة 3، و هذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الإقتصادية موجبة أو معدومة ، و حينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل وفيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي الى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل (العمود الأخير في الجدول) و بقية المتغيرات معدومة، أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال3-7: أوجد حل أمثل للبرنامج التالي (مثال2-2) بإستعمال طريقة الجداول:

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \geq 6\\ 6x_1 + x_2 \geq 6\\ x_2 \geq 2\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

1- يتم إيجاد الصيغة النموذجية. و تصبح القيود كما يلي:

$$\boxed{\begin{array}{l}3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 6\\ 6x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a = 6\\ x_2 - x_7^e + x_8^a = 2\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0,\\ x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0\end{array}}$$

كما تصبح الدالة الإقتصادية على النحو التالي:

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

أو

$$\boxed{\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a}$$

كما سبقت الإشارة فإن المتغيرات الإصطناعية أخذت المعامل M بإشارة موجبة و يفترض فيه أن يكون كبيرا جدا و هذا حتى تكون المتغيرات المضروبة فيه و التي هي مجرد متغيرات مساعدة، خارج نظام الحل الأساسي النهائي، لكونها أولى المتغيرات المرشحة للخروج من الأساس لكون معاملاتها كبيرة جدا.

نستخرج قيم المتغيرات الإصطناعية من تشكيلة المعادلات أعلاه:

$$x_4^a = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e$$

$$x_8^a = 2 - x_2 + x_7^e$$

ثم نعوضها في دالة الهدف المحولة:

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2 + M(6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e) + M(6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e) + M(2 - x_2 + x_7^e).$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد:

$$\boxed{Z = (10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + 14M}$$

بجعل دالة الهدف تساوي صفر، و هي نقطة الإنطلاق في إيجاد الحل نجد:

$$\boxed{(10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -14M}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	3	2	-1	1	0	0	0	0	6
x_6^a	**6**	1	0	0	-1	1	0	0	6
x_8^a	0	1	0	0	0	0	-1	1	2
ΔZ	10-9M	30-4M	M	0	M	0	M	0	-14M

جدول3-6

على عكس الحال كما هـــو في حالـــة التعظيـــم فإنـــه في حالـــة التدنئـــة تكون المتغيرة التي تدخل الأســـــاس هـــي المقابلـــة لأصغـــر قيمـــة ســـالبة و هـــي في مثالنـــا 10-9M و بالتـــالي فالمتغـــيرة الـــتي تدخـــل الأســـــاس هي x_1 و يكون عمود عنصر الإرتكاز هـــو العمـــود الأول.

أما المتغيرة التي تخرج مـــن الأســـاس فـــهي المقابلـــة لأصغـــر نســـبة بـــين عمود الثوابت وعمـــود عنصـــر الإرتكـــاز، هـــي x_6^a .

و عليه نجـــري التحويـــلات اللازمـــة كمـــا جـــرى في حالـــة التعظيـــم فنحصل على الجـــدول التـــالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	0	3/2	-1	1	1/2	/	0	0	3
x_1	1	1/6	0	0	-1/6	/	0	0	1
x_8^a	0	1	0	0	0	/	-1	1	2
ΔZ	0	(170-15M)/6	M	0	(10-3M)/6	/	M	0	-5M-10

جدول3-7.

لاحظ بـــأن عنـــاصر عمـــود المتغـــيرة الإطناعيـــة الـــتي خرجـــت مـــن الأســـاس لم يتـــم حســـابها و تم الإســـتغناء عنـــها لأن الخوارزميـــــة لا يمكن أن تدخلها الى الأســـاس مـــرة ثانيـــة.

بمـــا أن المعـــاملات في الســـطر الأخـــير ليســـت كلـــها غـــير ســـــالبة، لذلك فالمتغـــــيرة المرشـــحة للدخـــول الى الأســـاس بـــأكثر ســـرعة هـــي المقابلـــة للمعـــامل (170-15M)/6 و بالتـــالي فـــهي x_2 و يتحـــدد بذلـــك عمود عنصر الإرتكاز، أمـــا المتغـــيرة الـــتي تخـــرج مـــن الأســـاس فـــهي إما x_4^a أو x_8^a لأن كلاهمـــا مقـــابلان لأقـــل نســـبة بـــين عمـــود الثوابت و عمـــود عنصـــر الإرتكـــاز و في هـــذه الحالـــة نـــأخذ واحـــدة لا على التعيين. بفرض أن المتغيرة التي تخرج هي x_4^a، و بـــإجراء التحويلات نحصل علـــى الجـــدول التـــالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	-2/3	/	1/3	/	0	0	2
x_1	1	0	1/9	/	-2/9	/	0	0	2/3
x_8^a	0	0	2/3	/	-1/3	/	-1	1	0=ε
ΔZ	0	0	(-6M+170)/9	/	(3M-70)/9	/	M	0	-200/3

جدول3-8.

بنفس المنهجية؛ فإن المتغيرة التي تدخل الأساس هي x_3^e و التي تخـــــرج x_8^a، لاحظ أن قيـــة x_8^a المقابلة هي 0 و قد فرضناهـــا(ε) وهـــي قيمـــة بجـــوار الصفر،وهذا لتسهيل عملية الحسابات، على أن تأخذ قيمتها الحقيقية عند نهايـــة الحل. وبإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	0	/	0	/	-1	/	2
x_1	1	0	0	/	-1/6	/	1/6	/	2/3
x_3^e	0	0	1	/	-1/2	/	-3/2	/	0
ΔZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	-200/3

جدول3-9.

بما أن كـــل عنـــاصر الســـطر الأخـــير أصبحـــت غـــير ســـالبة، فنكـــون بذلك حصلنا علـــى جـــدول الحـــل الأمثـــل و تكـــون قيـــم المتغـــيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالـــــة الإقتصاديـــة هـــي:

$x_1=2/3$

$x_2=2$

أما بقية المتغيرات فـــــهي معدومـــة.

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي:

Z=200/3

و هي نفس النتائج المحصل عليها بإستخدام الطريقة البيانية .
يمكن التحقق من مدى إحترام القيود بالتعويض في كل قيد كما يلي:

القيد الأول: $3x_1 + 2x_2 \geq 6 \Rightarrow 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times 2 = 6$ أي أن القيد محقق تماما

و هو ما يؤكد أن متغيرة الفجوة x_3^e تكون قيمتها بالفعل معدومة.

القيد الثاني: $6x_1 + x_2 \geq 6 \Rightarrow 6 \times \frac{2}{3} + 2 = 6$ و هو قيد محقق أيضا تماما.

و يلاحظ أيضا أن القيد الثالث محقق تماما.

مثال3-8: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي بإستعمال طريقة السمبليكس.

$$Min: Z = 3x_1 + 10x_2$$
$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يتم أولا إيجاد الصيغة النموذجية و هي :

$$\boxed{\begin{aligned} & Min: Z = 3x_1 + 10x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a \\ & s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3^e + x_4^a = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_5^e + x_6^a = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

من مجموعة القيود نستخرج قيم المتغيرات الإصطناعية و نعوضها في دالة الهدف كما يلي:

$$x_4^a = 10 - 5x_1 - 6x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = 14 - 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Min: Z = 3x_1 + 10x_2 + M(10 - 5x_1 - 6x_2 + x_3^e) + M(14 - 2x_1 - 7x_2 + x_5^e)$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد دالة الهدف كما يلي:

$$\boxed{Min: Z = (3 - 7M)x_1 + (10 - 13M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + 24M}$$

عند Z=0 نجد:

$$\boxed{(3 - 7M)x_1 + (10 - 13M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M}$$

و يكون الجدول الأساسي الأول على الشكل:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	5	6	-1	1	0	0	10
x_6^a	2	7	0	0	-1	1	14
ΔZ	3-7M	10-13M	M	0	M	0	-24M

جدول3-9.

- المتغيرة x_2 هي المرشحة للدخول الى الأساس لكونها تقابل أقل قيمة في سطر معاملات دالة الهدف، لأن الإفتراض الأساسي هو أن قيمة M كبيرة جدا و هي أساسا قيمة مساعدة خارج النظام، و هذا الإفتراض هو الذي يجعلها تزاح في النهاية كلية بفعل منطق الخوارزمية المتبعة في الحل.
- العمود الذي تنتمي إليه x_2 هو عمود عنصر الإرتكاز.
- المتغيرة التي تخرج هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة لحاصل قسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المقابلة في عمود عنصر الإرتكاز، وهي في السطر الأول ، يسمى هذا السطر بسطر عنصر الإرتكاز، و يكون

عنصر الإرتكاز هو القيمة 6 أي العنصر الموجود عند تقاطع عمـــود عنصـــر الإرتكاز مع سطر عنصر الإرتكاز.

نجري التحويلات كما جرت في حالة التعظيم، فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_2	5/6	1	-1/6	/	0	0	10/6
x_6^a	-23/6	0	**7/6**	/	-1	1	7/3
ΔZ	(23M-32)/6	0	(10-7M)/6	/	M	0	(-14M-100)/6

جدول3-10

من الجدول نجد:

$x_1=0$

$x_2=10/6$

$x_6^a=7/3$

$x_3^e=x_4^a=x_5^e=0$

يمكـــن التـــأكد مـــن قيمـــة الدالـــة الإقتصاديـــة بتعويـــض المتغـــيرات في الدالة الإقتصادية كمـــا هـــي في الصيغـــة النموذجيـــة.

هل هذا الحل أمثل؟ هـــو غـــير أمثـــل لأن ليـــس كـــل عنـــاصر الســـطر الأخير موجبة. وعليه ينبغـــي تحســـين الحـــل.

المتغيرة المرشحة للدخول هي x_3^e و المتغيرة المرشحة للخروج هي x_6^a.

بإجراء التحويلات اللازمة نحصـــل علـــى الجـــدول التـــالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_2	12/42	1	0	/	-1/7	/	2
x_3^e	-23/7	0	1	/	-6/7	/	2
ΔZ	1/7	0	0	/	10/7	/	-20

جدول3-11

بما أن كل معاملات الدالة أصبحـــت غـــير ســـالبة لذلـــك نكـــون قـــد وصلنا الى الحل الأمثـــل وهـــو:

$x_1=0$

$x_2=2$

$x_3^e=2$

أما بقية المتغيرات فـــهي معدومـــة.

و قيمـــة الدالـــة الإقتصاديـــة هـــي : Z=20 (لاحـــظ أننـــا أهملنـــــا الإشـــارة -).

و يمكن التحقق من صحة الحـــل في القيـــود و في الدالـــة حيـــث نجـــد:

عند القيد الأول: $5x_1+6x_2\geq 10 \Rightarrow 0+6\times 2=12>10$

و هو قيد محقق و تبقى طاقة غير مستغلة قيمتها 2 و هذا ما تعبر عنه متغـــيرة الفجوة $x_3^e=2$

عند القيد الثاني: $2x_1+7x_2\geq 14 \Rightarrow 0+7\times 2=14$

و هو قيد محقق تمامـــا.

و بالتعويض في دالة الهـــدف نجـــد:

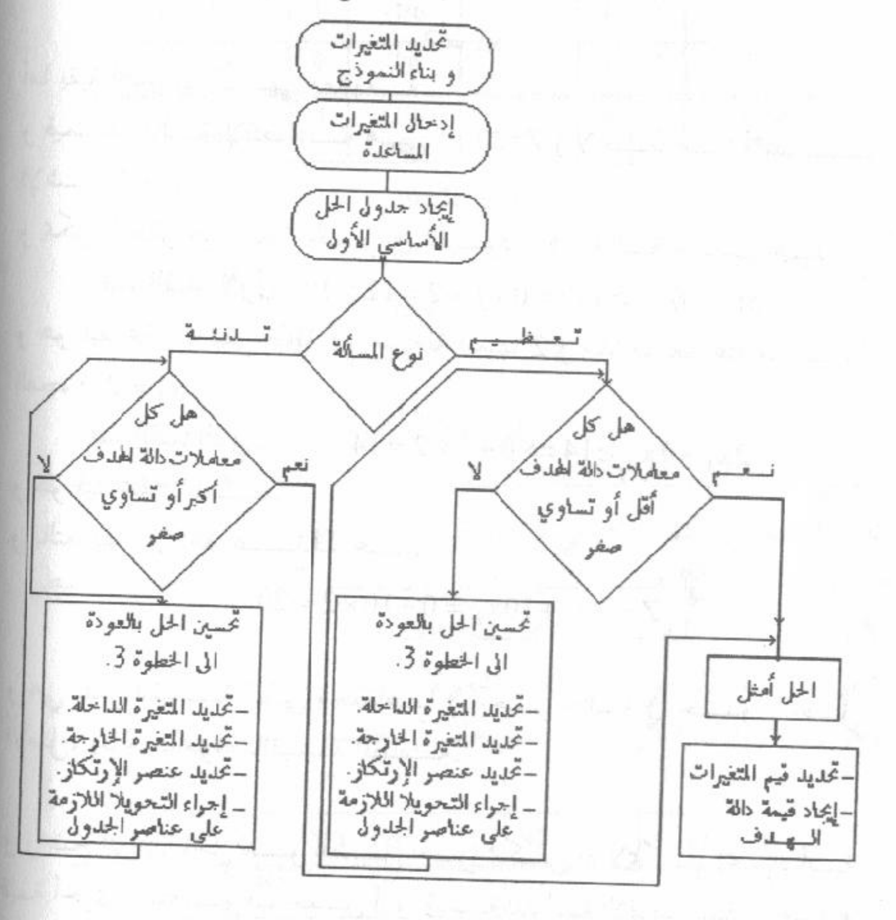
$$Z=3x_1+10x_2=0+10\times 2=20$$

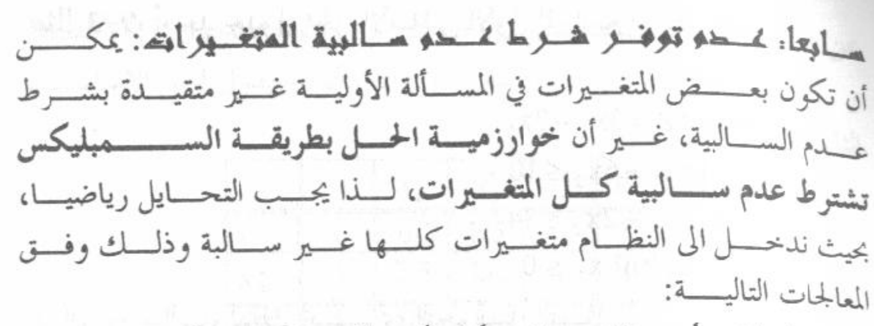
و هي نفس القيمـــة الـــتي وجدناهـــا في آخـــر خانـــة في جـــدول الحـــل الأمثل، إنما مـــأخوذة بالقيمـــة المطلقـــة.

و واضح أن هذا الحل هـــو أفضـــل حـــل ممكـــن إذ لايمكـــن إيجـــاد أيـــة قيمة أخرى للمتغـــيرات تحقـــق أدنى قيمـــة للدالـــة الإقتصاديـــة و تحـــترم في نفس الوقت جميـــع القيـــود.

مخطط 3-1

مخطط إيجاد الحل الأمثل.





سابعا: عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات: يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن **خوارزمية الحل بطريقة السمبليكس تشترط عدم سالبية كل المتغيرات**، لذا يجب التحايل رياضيا، بحيث ندخل الى النظام متغيرات كلها غير سالبة وذلك وفق المعالجات التالية:

1- إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر: أي: $x_j \le 0$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض: $x_j = -x_j'$

حيث: $x_j' \ge 0$

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نتبع خوارزمية الحل و نوجد الحل الأمثل بشكل عادي، و حينئذ نحول المتغير x_j' الى أصله و فق التحويل الأولي.

2- إذا كان أحد المتغيرات حرا: أي يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت في الإتجاه الموجب أو السالب، أي:

$$x_j \in (-\infty\,,\ +\infty)$$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$$x_j = x_j' - x_j''$$

حيث: $x_j' \ge 0 \,, x_j'' \ge 0$

أي أن x_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث :

- إذا كان x_j موجبا يكون: $x_j' > x_j''$
- إذا كان x_j سالبا يكون: $x_j' < x_j''$
- إذا كان x_j معدوما يكون: $x_j' = x_j''$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نوجد الحل الأمثل، و نقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي و فق صيغة التحويل أعلاه.

مثال3-9: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max} : Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$

بما أن x_2 سالب، لذلك نجري التحويل التالي:

نفرض أن: $x_2 = -x_2'$ حيث : $x_2' \ge 0$ ، بالتعويض في البرنامج أعلاه نحصل على البرنامج المحور التالي:

$$\text{Max} : Z = 3x_1 - 3x_2'$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 - 6x_2' \le 10 \\ 2x_1 - 2x_2' \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0 \end{cases}$$

و تكون الصيغة النموذجية للبرنامج هي:

$$\text{Max} : Z = 3x_1 - 3x_2'$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 - 6x_2' + x_3^e = 10 \\ 2x_1 - 2x_2' + x_4^e = 14 \\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_3^e \ge 0, x_4^e \ge 0 \end{cases}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2'	x_3^e	x_4^e	**B**
x_3^e	5	-6	1	0	**10**
x_4^e	2	-2	0	1	**14**
ΔZ	**3**	**-3**	**0**	**0**	**0**

جدول3-12.

عن طريق خوارزمية السمبلكس نلاحظ أن x_1 مرشحة للدخول الى الأساس، و x_3^e مرشحة للخروج من الأساس، و عليه يكون جدول الحل الأساسي الثاني على النحو:

	x_1	x_2'	x_3^e	x_4^e	**B**
x_1	1	-6/5	1/5	0	**2**
x_4^e	0	2/5	-2/5	1	**10**
ΔZ	**0**	**3/5**	**-3/5**	**0**	**-6**

جدول3-13

من الجدول أعلاه نجد أن x_2' مرشحة للدخول و x_4^e مرشحة للخروج، و عليه يكون جدول الحل الأمثل هو:

	x_1	x_2'	x_3^e	x_4^e	**B**
x_1	1	0	-1	3	**32**
x_2'	0	1	-1	5/2	**25**
ΔZ	**0**	**0**	**0**	**-3/2**	**-21**

جدول3-14

من هذا الجدول نجد:

$$x_1 = 32$$
$$x_2' = 25$$
$$x_3^e = 0$$
$$x_4^e = 0$$

و قيمة الدالة الإقتصادية هي: $Z=21$

بعد إيجاد جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 على أساس التحويل المفترض مع بداية الحل و هو $x_2 = -x_2'$.

بما أن :

$$x_2' = 25$$

لذلك فإن:

$$x_2 = -25$$

و حيث أن الدالة الإقتصادية الأصلية هي:

$Z=3x_1+3x_2$

بالتعويض نجد:

$Z=3(32)+3(-25)=21$

أي أن قيمة الدالة الإقتصادية تبقى هي نفسها بدون تغيير.

مثال3-10: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c\begin{cases}5x_1 + 6x_2 \le 10\\ 2x_1 + 7x_2 \le 14\\ x_1 \ge 0, x_2 \forall\end{cases}$$

في هذه الحالة x_2 حر يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت موجبة أو سالبة. لذلك نفترض أن هذه المتغيرة عبارة عن الفرق بين متغيرتين كلاهما موجب، أي:

$x_2 = x_2' - x_2''$ مع $x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0$

بالتعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$Max: Z = 3x_1 + 10(x_2' - x_2'')$$

$$s/c\begin{cases}5x_1 + 6(x_2' - x_2'') \le 10\\ 2x_1 + 7(x_2' - x_2'') \le 14\\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0\end{cases}$$

بفك الأقواس نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$Max: Z = 3x_1 + 10x_2' - 10x_2''$$

$$s/c\begin{cases}5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' \le 10\\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' \le 14\\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0\end{cases}$$

بإدخال متغيرات الفجوة نحصل على الصيغة النموذجية التالية:

$$Max: Z = 3x_1 + 10x_2' - 10x_2''$$

$$s/c\begin{cases}5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' + x_3^e = 10\\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + x_4^e = 14\\ x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0, x_3^e \ge 0, x_4^e \ge 0\end{cases}$$

و عليه يكون جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	B
x_3^e	5	6	-6	1	0	**10**
x_4^e	2	7	-7	0	1	**14**
ΔZ	**3**	**10**	**-10**	**0**	**0**	**0**

جدول3-15

و يتم إيجاد الحل بطريقة السمبلكس و هذا ما يظهره الجدول التالي:

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	B
x_2'	5/6	1	-1	1/6	0	10/6
x_4^e	-23/6	0	0	-7/6	1	7/3
ΔZ	**-16/3**	**0**	**0**	**-10/6**	**0**	**-50/3**

جدول3-16

حيث أن الحل الأمثل هو:

$x_1 = 0$

$x_2' = 10/6$

$x_2'' = 0$

$x_3^e = 0$

$x_4^e = 7/3$

و أعظم قيمة للدالة الإقتصادية هي: **Z=50/3**

بعد إيجاد قيم المتغيرتين x'_2 و x''_2 في جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 و هي عبارة عن الفرق بينهما حسب معادلة التحويل أعلاه و هي : $x_2 = x'_2 - x''_2$، و عليه فإن:

$$x_2=10/6-0=10/6$$

و هي قيمة موجبة هنا، و يمكن أن تكون سالبة فيما لو كانت x''_2 أكبر من x'_2

ثامنا: حالات أخرى: أثناء سيرورة الحل قد نصادف عدة حالات خاصة، منها:

1- إنعدام وجود حل أمثل: في هذه الحالة نصل الى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنئة، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير إصطناعي واحد أو أكثر، و هذا ما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2- عدم محدودية الحل: و هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الإرتكاز أقل أو تساوي الصفر، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت و عناصر عمود عنصر الإرتكاز.

3- الإنحلال: نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول الى الأساس، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. و في الحالتين نختار واحدة لا على التعيين.

تمارين

تمرين1: بإستخدام طريقة السمبليكس، أوجد حل لجميع مسائل سلسلتي الفصل الأول و الثاني.

تمرين2: أوجد حلول البرامج الخطية التالية بطريقة السمبليكس:

$$\text{Min}: Z = 80x_1 + 60x_2$$

$$s/c\begin{cases} 0.2x_1 + 0.32x_2 \le 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:
$x_1=0.5833$, $x_2=0.4167$
Z=71.67

$$\text{Max}: Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5$$

$$s/c\begin{cases} 3x_1 + x_3 - x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\ x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: $x_1=7/3$, $x_4=43/9$, $x_5=4$ بقية المتغيرات معدومة. **Z=31.77**.

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$s/c\begin{cases} 0 \le x_1 \le 400 \\ 0 \le x_2 \le 300 \\ x_1 + x_2 = 600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: $x_1=x_2=300$ **Z=2100**

$$\text{Max}: Z = 60x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 90x_4$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ -7x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 \ge -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: $x_1=7/61$, $x_2=$ $x_4=0,0$ $x_3=4/61$ $x_5^e=904/6$ **Z=780/61**

$$\text{Max}: Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$s/c\begin{cases} x_1 \le 4000 \\ x_2 \le 5000 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 6000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: $x_2=5000$ $x_1=2666$ $x_3^e = 1333$ **Z= 3299**

$$\text{Max}: Z = 100x_1 + 150x_2 + 200x_3$$

$$s/c\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 + 12x_3 \le 65 \\ -7x_1 - 8x_2 + 12x_3 \le -45 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: $x3=0.56$, $x2=6.47$ بقية المتغيرات معدومة.
Z=1083.333

تمرين3: أوجد حلول البرامج الخطية التالية بطريقة السمبليكس:

$\text{Min}: Z = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $s/c \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 5 \\ 10x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$ الحل: $Z=75$ $x_1=2.5$	$\text{Min}: Z = 3x_1 + 20x_2 + 30x_3$ $s/c \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 15 \\ 15x_1 + 12x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$ الحل: $Z=22.5$ $x_1=7.5$
$\text{Min}: Z = -x_1 + x_2$ $s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \forall \end{cases}$	$\text{Max}: Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \forall \end{cases}$

الفصل الرابع

الثنائية أو البرنامج المرافق

لكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات: x_1 , x_2 , x_3, ...,x_n برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات: y_1 , y_2 , y_3, ...,y_m مشتق منه معرف حسب الحالة كما يلي:

أولا: ثنائية الصيغ القانونية: إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية:

$$\text{Max}: Z = C'X$$
$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$\boxed{\text{Min}: Z = B'Y \quad s/c \begin{cases} A'Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}}$$

فلإيجاد البرنامج الثنائي لأي **برنامج أولي في صيغته القانونية** نتبع الخطوات التالية:

1- تقلب صيغة دالة الهدف، إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي: Min فإنها تتحول الى Max في البرنامج الثنائي، و إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي Max فإنها تتحول الى Min في البرنامج الثنائي.

2- تتعاكس المتراجحات، بحيث ≤(أقل أو تساوي) في حالة Max تتحول الى ≥ (أكبر أو تساوي)، و ≥ (أكبر أو تساوي) في حالة Min تتحول الى ≤ (أقل أوتساوي).

3-إذا كانت متغيرات البرنامج الأولي هي: $x_1, x_2, x_3 .... x_n$ فإن متغيرات البرنامج الثنائي هي: $y_1, y_2, y_3 .... y_m$ حيث m هي عدد قيود البرنامج الأولي.

4- عمود الثوابت في البرنامج الأولي يتحول الى معاملات متغيرات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.

5- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود تتحول الى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب.

6- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي، تتحول الى ثوابت قيود البرنامج الثنائي بنفس الترتيب.

7-في كلا البرنامجين تكون المتغيرات غير سالبة (مادام صيغة البرنامج الأولي قانونية).

و تفصيلا إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية:

$$\text{Max}: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي هو:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min}: Z = b_1y_1 + b_2y_2 \\ s/c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge \end{cases} \end{array}}$$

لاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي هو بعدد القيود في البرنامج الأولي.

و يلاحظ أيضا أن هذين البرنامجين متناظرين، و يظهر التناظر عموما من خلال الجدول*4-1*.

	x_1	x_2	x_3	.	.	x_n	$\ge$	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}	$\le$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	a_{2n}	$\le$	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	.	.	a_{3n}	$\le$	b_3
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.	.	a_{mn}	$\le$	b_m
$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	.	.	$\ge$		
0	c_1	c_2	c_3	.	.	c_n		Min / Max

جدول4-1.

8- في جدول الحل الأمثل تكون العلاقة بين متغيرات البرنامجين كما في الجدول*4-2*.

البرنامج	المتغيرات الرئيسية	متغيرات الفجوة
الأولي	$x_1\ x_2 .... x_s$	$x_1^e\ x_2^e ...... x_r^e$
البرنامج	$y_1^e\ y_2^e ...... y_s^e$	$y_1\ y_2 .... y_r$
الثنائي	متغيرات الفجوة	متغيرات رئيسية

جدول4-2

9- في جدول الحل الأمثل للبرنامجين نجد:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة و التي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي و بالقيمة المطلقة.
- و قيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي.

- قيـم المتغـيرات الحقيقيـة في البرنـامج الأولي و الـتي تظـهر في عمـود الثوابـت، تسـاوي القيم المقابلـة لمتغـيرات الفجـوة للبرنامج الثنائي و الـتي تظـهر في السـطر الأخـير مـن جـدول الحل الأمثل، و قيم المتغـيرات الحقيقيـة للبرنـامج الثنـائي و الـتي تظـهر في عمود الثوابـت، تسـاوي القيـم المقابلـة لمتغـيرات الفجـوة للبرنـامج الأولي و التي تظـهر في السـطر الأخـير مـن جـدول الحـل الأمثـل. (بالقيمة المطلقـة).

- قيمـة الدالـة الإقتصاديـة في الحـل الأمثـل للبرنـامجين تكون متساوية، و في كلا الحـالتين نـأخذ قيمتـها المطلقـة.

مثال4-1: من البرنـامج الخطـي التـالي:

$$\text{Min}: Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- أوجد جـدول الحـل الأمثـل.

2- أوجـد البرنـامج الثنـائي. ثم أوجـد جـدول حلـه الأمثـل.

3- قارن نتائج الحـل في البرنـامجين. مـاذا تسـتنتج؟.

الحل:

1- إيجاد الحـل الأمثـل:

الصيغة النموذجيـة هـي:

$$\text{Min}: Z = 3x_1 + 10x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3^e + x_4^a = 10 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_5^e + x_6^a = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

من الصيغة النموذجيـة نسـتنتج:

$$x_4^a = 10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

بالتعويض في دالة الهـدف نجـد:

$$Z = 3x_1 + 10x_2 + M(10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e) + M(14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e)$$

بفك الأقواس و جمع الحـدود المتشـابة و جعـل Z=0 نجـد:

$$\boxed{(3 - 3M)x_1 + (10 - 8M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M}$$

و عليه يكون جـدول الحـل الأساسـي الأول:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	5	1	-1	1	0	1	10
x_6^a	-2	7	0	0	-1	1	14
ΔZ	(3-3M)	(10-8M)	M	0	M	0	-24M

جدول4-3

المتغـيرة المرشـحة للدخـول للأسـاس هـي x_2 و المرشـحة للخـروج من الأساس هي x_6^a، و عنصـر الإرتكـاز هـو 7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	**37/7**	0	1-	1	1/7	/	8
x_2	**-2/7**	1	0	0	-1/7	/	2
ΔZ	$\frac{41 - 37M}{7}$	0	M	0	$\frac{10 - M}{7}$	/	-8M-20

جدول4-4

الحل في الجدول الثاني غير أمثل لأن ليس كل عناصر الصف الأخير موجبة.

المتغـيرة المرشـحة للدخـول للأسـاس هـي x_1 و المرشـحة للخـروج منه هي x_4^a، وعنصـر الإرتكـاز هـو **37/7**.

بإجراء التحويلات نحصـل علـى الجـدول4-5.

			متغيرات مساعدة				
	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_1	1	0	-7/37	/	1/37	/	56/37
x_2	0	1	-2/37	/	-35/259	/	90/37
ΔZ	0	0	41/37	/	37/47	/	**-1068/37**
			حل البرنامج الثنائي				

جدول 4-5

كل معاملات الدالة أصبحت موجبة و بالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل.

حيث: $x_1=56/37$ $x_2=90/37$ **$Z=1068/37$**

2- إيجاد البرنامج الثنائي و حله الأمثل:

أ- إيجاد البرنامج الثنائي:

بتطبيق قواعد التحويل فإن البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max}: Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$s/c\begin{cases}5y_1 - 2y_2 \le 3 \\ y_1 + 7y_2 \le 10 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0\end{cases}$$

ب- حل البرنامج الثنائي: الصيغة النموذجية هي:

$$\text{Max}: Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$s/c\begin{cases}5y_1 - 2y_2 + y_3^e = 3 \\ y_1 + 7y_2 + y_4^e = 10 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3^e \ge 0, y_4^e \ge 0\end{cases}$$

و منه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	Y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	B
y_3^e	5	-2	1	0	3
y_4^e	1	7	0	1	10
ΔZ	10	14	0	0	0

جدول 4-6

المتغيرة التي تدخل الأساس هي y_2 و التي تخرج منه هي y_4^e وعنصر الإرتكاز هو7. و جدول الحل الأساسي الثاني هو:

	Y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	B
y_3^e	**37/7**	0	1	2/7	41/7
y_2	1/7	1	0	1/7	10/7
ΔZ	8	0	0	-2	-20

جدول 4-7

يلاحظ أيضا أن الحل غير أمثل، المتغيرة التي تدخل هي y_1 والمتغيرة التي تخرج هي y_3^e و عنصر الإرتكاز هو 37/7. ويكون جدول الحل الأمثل هو:

			متغيرات مساعدة		
	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	B
y_1	1	0	7/37	2/37	41/37
y_2	0	1	-1/37	35/259	37/47
ΔZ	0	0	-56/37	-90/37	**-1068/37**
			حل البرنامج الأولي		

جدول 4-8

كل معاملات الدالة أصبحت أقل أو تساوي الصفر، لذلك فالحل أصبح أمثليا:

حيث: $y_1=41/37$ $y_2=47/37$ **$Z=1068/37$**

3- المقارنة و الإستنتاج:

من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

$x_1=56/37$ و هي قيمة تقابل y_3^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

$x_2=90/37$ و هي قيمة تقابل y_4^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

بقية المتغيرات معدومة.

و إذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:

x_3^e تقابلها القيمة 41/37 ، و هي قيمة y_1 في البرنامج الثنائي.

x_5^e تقابلها القيمة 47/37 ، و هي قيمة y_2 في البرنامج الثنائي.

ملاحظة: إن هـذا التقـابل يتـم علـى وجـه التـرتيب، مـع إهمـال الإشارة السـالبة.

كما أن قيمـة الدالـة الإقتصاديـة متسـاوية في جـدول الحـل الأمثـل للبرنامجين. و الجدول التـالي يوضـح ذلـك:

البرنامج		x_1	x_2	x_3^e	x_5^e	B	
الأولي	x_1					56/37	$\leftarrow y_3^e$
	x_2					90/37	$\leftarrow y_4^e$
	ΔZ	0	0	41/37	37/47	**-1068/37**	البرنامج
				$\uparrow y_1$	$\uparrow y_2$	الثنائي	

جدول4-9

و النتيجة هـي أن جـدول الحـل الأمثـل للبرنـامج الثنـائي يتضمـن أيضـا الحـل الأمثـل للبرنـامج الثـنائي، و جـدول الحـل الأمثـل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضـا الحـل الأمثـل للبرنـامج الأولي.

ثانيا: ثنائيـة الصـيغ المختلطـة: في هـذه الحالـة فإنـه يتـم إيجـاد الثنائية وفق القواعـد التاليـة:

قاعدة1: إذا كان القيد في المسألة الأولية من الشـكل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ فـإن المتغير y_i المرافق له في المسألة الثنائية يكون حرا أي $y_i \in (-\infty, +\infty)$. وبمعنى آخر مقابل كل متغير فجوة معدوم في قيد المسألة الأولية، يقابله متغير أسـاس حر في المسألة الثنائية.

قاعدة2: إذا كـان أحـد المتغـيرات x_i في المسـألة الأوليـة حـرا أي $x_i \in (-\infty, +\infty)$ فإن القيد رقم i المقابل في المسألة الثنائيـة يكـون علـى الشكل: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = c_j$. بمعنى آخر مقابل كل متغير أساس حر في المسـألة الأولية متغير فجوة معدوم في المسألة الثنائية.

قاعدة3: إذا كان القيد في المسألة الأولية–حالـة التعظيـم– علـى الشـكل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ يتم تحويله الى الصيغة القانونية بضرب الطرفين في الإشارة (−) فيصبح القيد على الشكل $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i$ ويكون المتغير y_i المرافق في الثنائية غير سالب، أي $y_i \geq 0$.

نظريات:

- **نظرية1:** ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.
- **نظرية2:** إذا كان للبرنامج الأولي حـل أمثل ، فـإن قيمة دالة الهـدف في البرنامجين تكون متساوية.

نظرية3: -إذا كان حل البرنامج الأولي لانهائي، فإن ثنائيته تكون متناقضة.

- إذا كان البرنامج الأولي متناقض، فإن البرنامج الثنائي يكون لانهائي أو متناقض.

4-2. أمثلة

البرنامج الأولي

$$\text{Max}: Z = 10x_1 + 30x_2$$
$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 6x_1 + x_2 \le 14 \\ 3x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي.

$$\text{Min}: Z = 6y_1 + 14y_2 - 2y_3$$
$$s/c \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \ge 30 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الأولي

$$\text{Min}: Z = 2x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le -5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

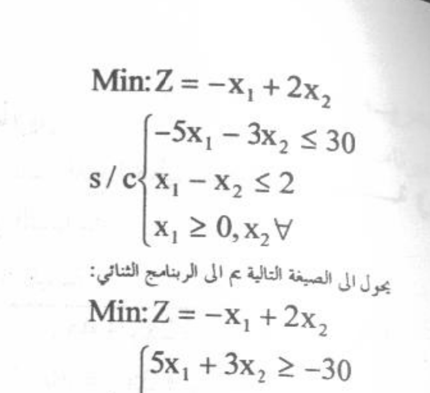
يحول الى الصيغة التالية ثم الى البرنامج الثنائي.

$$\text{Min}: Z = 2x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ -x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي.

$$\text{Max}: Z = -2y_1 - 2y_2 + 5y_3$$
$$s/c \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \le 2 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الأولي



$$\text{Min}: Z = -x_1 + 2x_2$$
$$s/c \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \le 30 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \forall \end{cases}$$

يحول الى الصيغة التالية ثم الى البرنامج الثنائي:

$$\text{Min}: Z = -x_1 + 2x_2$$
$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge -30 \\ -x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \forall \end{cases}$$

البرنامج الثنائي.

$$\text{Max}: Z = -30y_1 - 2y_2$$
$$s/c \begin{cases} 5y_1 - y_2 \le -1 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الأولي

$$\text{Min}: Z = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$
$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \ge 100 \\ -4x_1 - x_2 - x_4 \ge -50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \forall, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي.

$$\text{Max}: Z = 100y_1 - 50y_2 + 20y_3$$
$$s/c \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 + y_3 \le 9 \\ 5y_1 + \quad y_3 \le 2 \\ 10y_1 + y_2 + 7y_3 = 4 \\ y_1 - y_2 + 7y_3 \le 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \forall \end{cases}$$

تمارين

تمرين1: أوجد ثنائيات كل البرامج الخطية المعروضة في سلسلتي الفصول الأول والثاني و الثالث.

تمرين2: أوجد ثنائيات البرامج التالية:

$\text{Max: } Z = x_1 + 7x_2 + 2x_3$ $\quad s/c \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \le 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \le 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$	$\text{Max: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ $\quad s/c \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$
$\text{Max: } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$ $\quad s/c \begin{cases} -x_1 + 6x_2 - 5x_3 \le 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \ge -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \forall \end{cases}$	

تمرين3: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min: } Z = 3x_1 + 10x_2$$
$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 10 \\ -2x_1 - 7x_2 \le -14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: 1- أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج.

2- أوجد ثنائية البرنامج.

3- أوجد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وحدد العلاقة بين الحلين.

تمرين4: أجب على نفس أسئلة التمرين السابق بالنسبة للبرنامج التالي:

$$\text{Min: } Z = -x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

تمارين مكملة: أوجد البرنامج المرافق لصيغ البرامج التالية وأوجد جداول الحل الأمثل للبرنامجين و قارن النتائج. ماذا تستنتج في كل حالة؟.

البرنامج الأولي	حل البرنامج الأولي	البرنامج الثنائي	حل البرنامج الثنائي
$\text{Max: } Z = 150x_1 + 20x_2$ $\quad s/c \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \le 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \le 500 \\ 15x_1 + 40x_2 \le 550 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$			
		$\text{Min: } Z = 15y_1 + 8y_2 + 4y_3$ $\quad s/c \begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 20 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$	
$\text{Max: } Z = 5x_1 + 10x_2$ $\quad s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$			
		$\text{Min: } Z = -24y_1 + 16y_2$ $\quad s/c \begin{cases} -4y_1 + 8y_2 \ge 10 \\ -8y_1 + 2y_2 \ge 8 \\ y_1 \ge 0, y_2 \forall \end{cases}$	

			Max: $Z = 20x_1 + 15x_2$ s / c $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
	Max: $Z = 21y_1 - 13y_2$ s / c $\begin{cases} 10y_1 - 5y_2 \leq 1 \\ 9y_1 + 12y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$		
			Max: $Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3$ s / c $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \forall \end{cases}$

الفصل الخامس

برمجة الأعداد الصحيحة.

بعض المتغيرات الإقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية، لايمكن تجزئتها، و إلاّ فقدت صفتها. فعندما نكون بصدد تحديد كميات الثلاجات الواجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20.4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة، فنقول أن الإنتاج اليومي هو 20 جهازا أو 21 جهاز. و في البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمها بالفاصلة وهو ما أدى الى البحث في التخلص من هذا المشكل، فنتج ما يسمى **ببرمجة الأعداد الصحيحة**.

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد صحيحة، و يتطلب ذلك المرور بعدة مراحل.

* **المرحلة الأولى**: إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذا حصل حل أمثل متغيراته لا تحمل قيما صحيحة ننتقل الى المرحلة الثانية.

* **المرحلة الثانية**: تسمى بمرحلة التفريع، و فيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي، بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، و تستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل الى حل أمثل متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وهناك طريقتين الأولى هي طريقة التفريع و التحديد و الثانية هي طريقة القطع، و نظرا لأن الطريقة الأولى هي الأكثر شيوعا و سهولة لذلك فسوف نقتصر عليها.

يتم إيجاد الحل الأمثل بطريقة **التفريع و التحديد** للبرنامج الأولي كما ورد أصلا دون إعتبار لشرط **المتغيرات أعداد صحيحة**. إذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل صحيحة، نتوقف و يكون ذلك هو الحل المراد الوصول إليه، و إذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل للبرنامج الأصلي ليست قيما صحيحة فحينئذ نقوم بتوليد برنامج جديد، حيث يضاف الى البرنامج الأصلي قيد آخر وفق ما يلي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو x_j حيث يأخذ قيمة غير صحيحة ولتكن b_i، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي:

$$b_{i1}<x_j<b_{i2}$$

حيث b_{i1} وb_{i2} أعدادا صحيحة غير سالبة، فلتجنيب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم إشتقاق قيدين جديدين هما $x_j \le b_{i1}$ و $x_j \ge b_{i2}$ ، ونضيف كل قيد منهما الى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف، و نأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدالة الإقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم و أقل قيمة للدالة الإقتصادية في حالة التدنئة، و إلاّ نستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الإقتصادية و هذا لغاية الوصول الى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة، و هذا ما يسمى **بالتفريع**.

مثال5-1: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$1-5 \quad s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة

جدول الحل الأمثل للبرنامج 5-1 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	B
x_1	1	5/2	1/4	11/2
ΔZ	0	-48	-5	-110

النتيجة: $x_1=11/2=5.5$ و $x_2=0$ و $Z=110$

يلاحظ أن x_1 هو قيمة غير صحيحة، و يمكن كتابتها كما يلي:

$$5<x_1<6$$

أي يمكن إستنتاج قيدين الأول هو: $x_1 \le 5$ والثاني هو: $x_1 \ge 6$.

و عليه فإن البرنامج الأصلي يفرع الى برنامجين الأول يتكون من البرنامج الأصلي مضافا اليه القيد الأول المستنتج و هو $x_1 \le 5$ و و الثاني أيضا يتكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد $x_1 \ge 6$، و هما:

البرنامج الأول

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$2-5 \quad s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة

البرنامج الثاني

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$3-5 \quad s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

نوجد الحل الأمثل لكل برنامج من البرنامجين:

جدول الحل الأمثل للبرنامج5-2 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	B
x_2	0	1	1/10	-4/10	1/5
x_1	1	0	0	1	5
ΔZ	0	0	-1/5	-96/5	-502/5

النتيجة: $x_1=5$ و $x_2=1/5=0.2$. و $Z=502/5$

بينما البرنامج 5-3 متناقض و ليس له حل، لذلك يتم الإستغناء عنه.

من خلال حل البرنامج5-2 وجدنا أن المتغيرة x_2 لاتأخذ قيمة صحيحة ويمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$0<x_2<1$$

و منه نستنتج القيدين الأول هو $x_2 \geq 1$ و الثاني $x_2<0$ هو و هو مرفوض لتناقضه مع شرط عدم السالبية.

لذلك فالبرنامجين الجديدين المتفرعين عن البرنامج 5-2 هما:

$$4\text{-}5 \quad \text{Max}: Z = 20x_1 + 2x_2 \qquad s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

$$5\text{-}5 \quad \text{Max}: Z = 20x_1 + 2x_2 \qquad s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة.

غير أن البرنامج 5-5 يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $x_2 \leq 0$ مرفوض ويتناقض مع شرط عدم السالبية.

أما جدول الحل الأمثل للبرنامج 5-4 فهو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^a	B
x_1	1	0	1/4	0	10/4	/	3
x_4^e	0	0	-1/4	1	-10/4	/	2
x_2	0	1	0	0	-1	/	1
ΔZ	0	0	-5	0	-48	/	-62

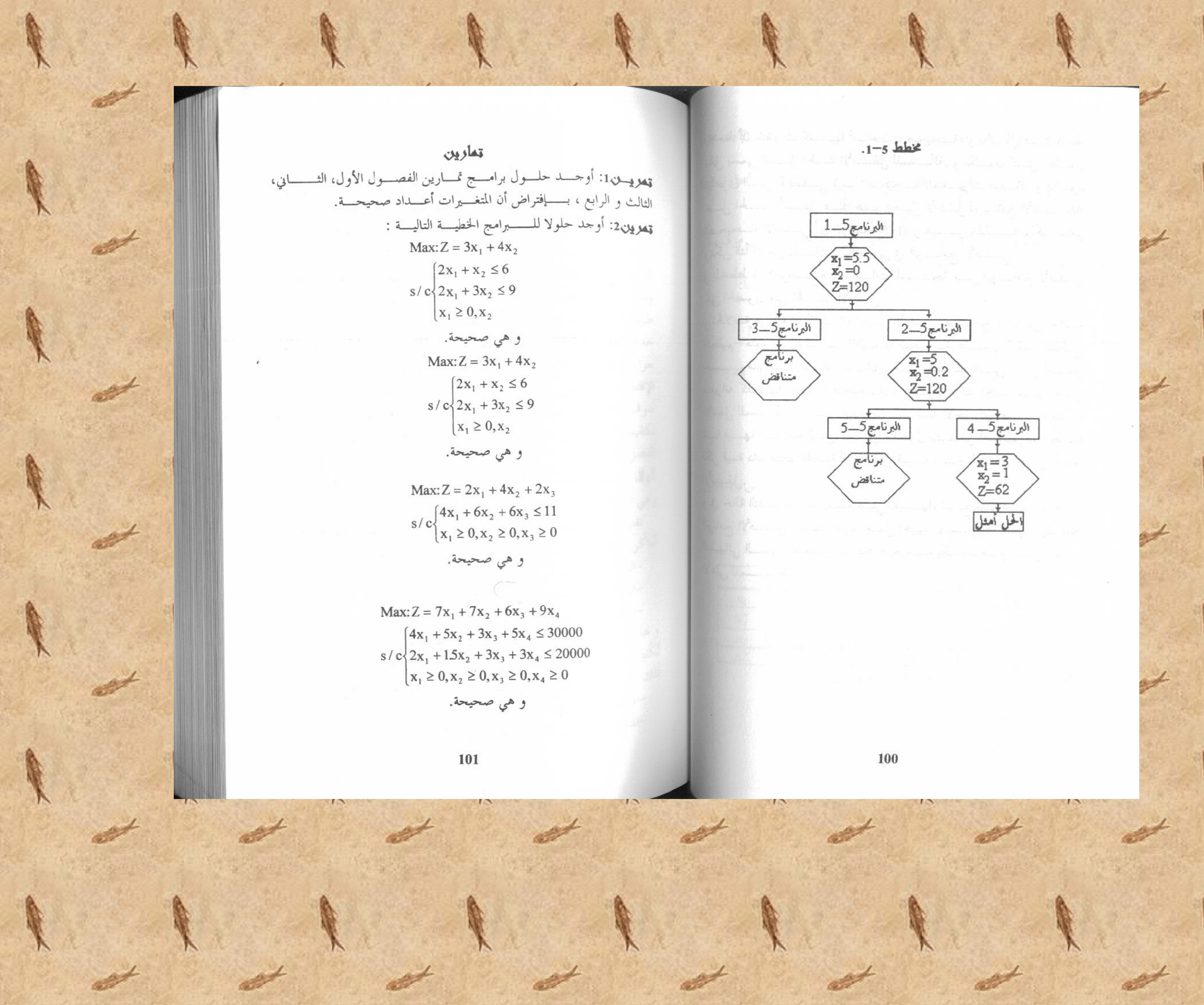
النتيجة: $x_1=3$ و $x_2=1$. و $Z=62$.

يلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة، و بالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل **الحد الأسفل للمسألة**، و تكون كل الحلول الأخرى التي لم تعطي قيما صحيحة للمتغيرات ملغاة. و يكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي أي البرنامج5-1، و هو يحققه بالكامل ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في البرنامج الأصلي.

و المخطط 5-1 يوضع التفرعات المستنتجة من البرنامج الأصلي حتى الحصول على الحل الأمثل.

و الخلاصة هي أنه إذا كان الحل الأمثل للبرنامج الأصلي-حالة التعظيم- متغيراته ليست أعدادا صحيحة، فإنه يستمر التفريع حسب منهجية المثال السابق، حتى نحصل على حل أمثل متغيراته كلها أعدادا صحيحة، و يكون هذا الحل هو الحل الأسفل للمسألة، و كل البرامج المتفرعة الأخرى تصبح ملغاة، بما فيها البرامج التي أدت الى حلول تتضمن أعدادا صحيحة لكن قيمة دالة هدفها المحصلة أقل من قيمة دالة الهدف لحل الحد الأسفل.

و في حالة التدنئة فإن الطريقة هي نفسها، تتبع ما عدا أن حل البرنامج الأصلي يكون هو حل الحد الأسفل و حل البرنامج النهائي الذي يتضمن أعدادا صحيحة يكون هو حل الحد الأعلى للمسألة.



مخطط 5-1.

البرنامج 5_1

$x_1=5.5$
$x_2=0$
$Z=120$

البرنامج 5_2

$x_1=5$
$x_2=0.2$
$Z=120$

البرنامج 5_3

برنامج متناقض

البرنامج 5_4

$x_1=3$
$x_2=1$
$Z=62$

الحل أمثل

البرنامج 5_5

برنامج متناقض

تمارين

تمرين1: أوجد حلول برامج تمارين الفصول الأول، الثاني، الثالث و الرابع ، بإفتراض أن المتغيرات أعداد صحيحة.

تمرين2: أوجد حلولا للبرامج الخطية التالية :

$$Max: Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases}2x_1 + x_2 \leq 6\\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9\\ x_1 \geq 0, x_2\end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$Max: Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases}2x_1 + x_2 \leq 6\\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9\\ x_1 \geq 0, x_2\end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$Max: Z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

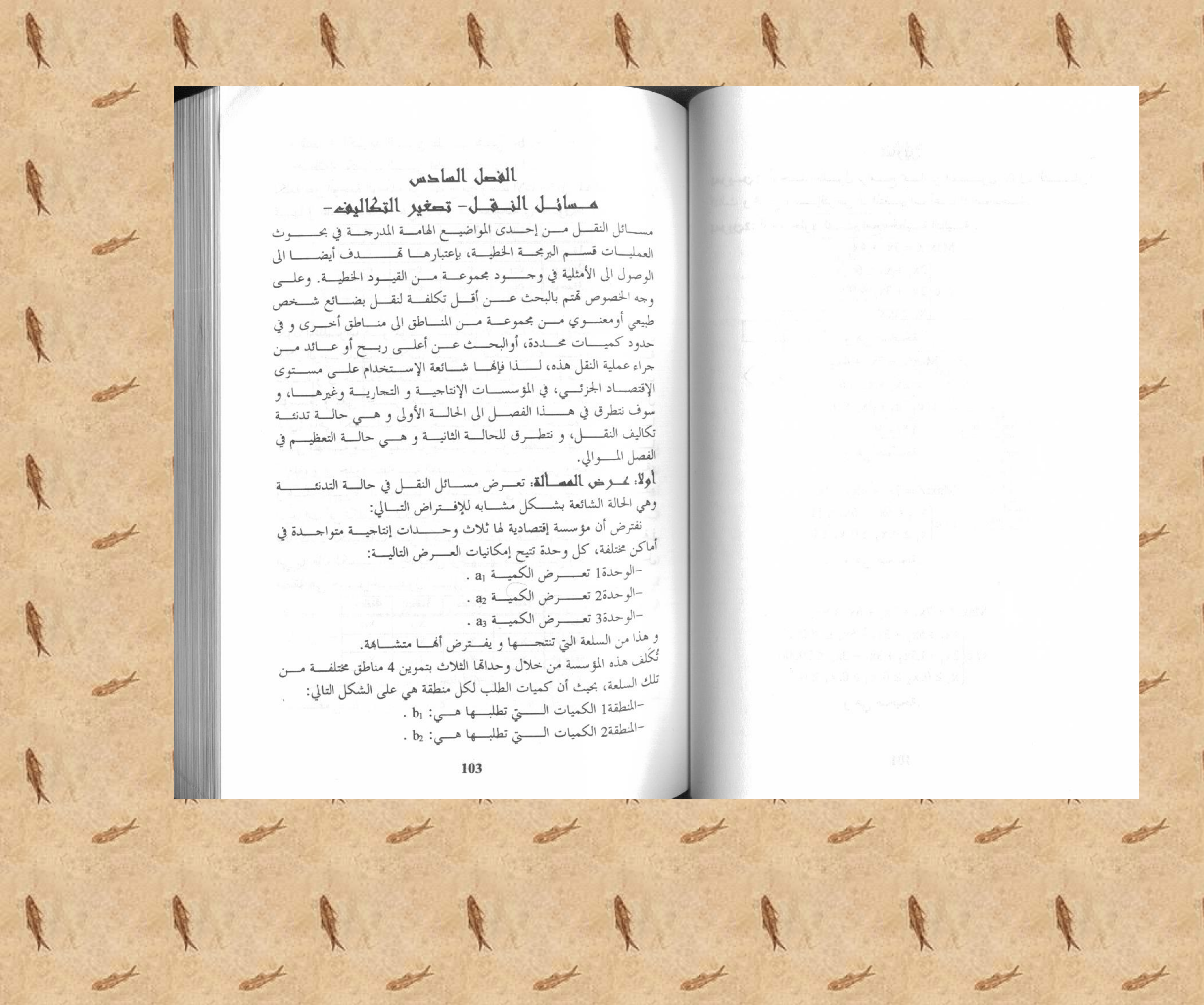
$$s/c\begin{cases}4x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 11\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases}$$

و هي صحيحة.

$$Max: Z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$$

$$s/c\begin{cases}4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30000\\ 2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20000\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\end{cases}$$

و هي صحيحة.



الفصل السادس

مسائل النقل- تصغير التكاليف-

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث العمليات قسم البرمجة الخطية، بإعتبارها تهدف أيضا الى الوصول الى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية. وعلى وجه الخصوص تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أومعنوي من مجموعة من المناطق الى مناطق أخرى و في حدود كميات محددة، أوالبحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه، لذا فإنها شائعة الإستخدام على مستوى الإقتصاد الجزئي، في المؤسسات الإنتاجية و التجارية وغيرها، و سوف نتطرق في هذا الفصل الى الحالة الأولى و هي حالة تدنئة تكاليف النقل، و نتطرق للحالة الثانية و هي حالة التعظيم في الفصل الموالي.

أولا: عرض المسألة: تعرض مسائل النقل في حالة التدنئة وهي الحالة الشائعة بشكل مشابه للإفتراض التالي:

نفترض أن مؤسسة إقتصادية لها ثلاث وحدات إنتاجية متواجدة في أماكن مختلفة، كل وحدة تتيح إمكانيات العرض التالية:

-الوحدة1 تعرض الكمية a_1 .

-الوحدة2 تعرض الكمية a_2 .

-الوحدة3 تعرض الكمية a_3 .

و هذا من السلعة التي تنتجها و يفترض أنها متشابهة.

تُكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث بتموين 4 مناطق مختلفة من تلك السلعة، بحيث أن كميات الطلب لكل منطقة هي على الشكل التالي:

-المنطقة1 الكميات التي تطلبها هي: b_1 .

-المنطقة2 الكميات التي تطلبها هي: b_2 .

-المنطقة3 الكميات التي تطلبها هي: b_3 .

-المنطقة4 الكميات التي تطلبها هي: b_4 .

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من وحدة الإنتاج i الى المنطقة المراد تموينها j محددة محاسبيا و هي c_{ij} ، و هي معروضة في الجدول التالي:

	المنطقة1	المنطقة2	المنطقة3	المنطقة4
الوحدة1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
الوحدة2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
الوحدة3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

جدول 6-1

يكون **المطلوب** هو تموين المناطق الأربعة بكل إحتياجاتها من خلال الوحدات الثلاث، على أن تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة و في حدود طاقات العرض لكل وحدة من وحدات المؤسسة. و بمعنى آخر يكون الهدف هو الإجابة على السؤال التالي: ماهي الكميات التي يجب على كل وحدة أن تمون بها كل منطقة مع ضمان حصول كل منطقة على إحتياجاتها كاملة، و في حدود الطاقة القصوى المتاحة لكل وحدة إنتاجية، و هذا بشرط أن تتحمل المؤسسة التي تنتمي اليها هذه الوحدات أقل تكلفة ممكنة؟.

فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة i المنطقة j هي x_{ij} فإن الكميات المحتمل توجيهها من كل وحدة الى كل منطقة هي حسب الجدول التالي:

	المنطقة1	المنطقة2	المنطقة3	المنطقة4
الوحدة1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الوحدة2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الوحدة3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

جدول6-2

وهو جدول مشابه لجدول التكاليف، غير أن الفرق هو أن قيم التكاليف من كل وحدة الى كل منطقة معلومة، غير أن في هذا الجدول الكميات عبارة عن متغيرات مجهولة تبحث عنها إشكالية المسألة.

ثانيا: تشكيل جدول مسائل النقل: إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال الإفتراضي السابق يمكن تلخيصه في جدول شامل هو جدول مسألة النقل و يكون على النحو التالي:

	المنطقة 1	منطقة 2	منطقة 3	منطقة 4	العرض
الوحدة1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1
الوحدة2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2
الوحدة3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3
الطلب	b_1	b_2	b_3	b_4	المجموع

جدول6-3.

إن هذا الجدول يلخص كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية الى كل منطقة في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة وهي القيم x_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة و كذا كميات الطلب لكل منطقة.

تسمى الوحدات الإنتاجية **بالمنبع**، كما تسمى المناطق المراد تموينها **بالمصب**، و عليه فإن القيمة c_{ij} نقول عنها بأنها تكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من **المنبع** i الى **المصب** j و هي قيمة **غير سالبة**. و x_{ij} هي الكميات المراد نقلها من **المنبع** i الى **المصب** j وهي أيضا قيمة **غير سالبة**.

ثالثا: الصيغة الرياضية لمسألة النقل: من الجدول 6-3 تظهر لنا الكميات المراد نقلها من كل منبع الى كل مصب،

وكذا تكلفة الوحدة الواحدة من كل منبع الى كل مصب،

وعليه فإن:

– التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث هي:

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{14}x_{14}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33}+c_{34}x_{34}.$$

و إختصارا تكتب كما يلي:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$

– الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

المنبع1: $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1$

المنبع2: $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2$

المنبع3: $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=a_3$

و إختصارا الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i$$

و يعني هذا أن الكميات المرسلة من كل منبع الى مختلف المصبات يجب أن تساوي قدرة العرض لكل منبع.

– الكميات المطلوبة في كل مصب هي:

المصب1: $x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1$

المصب2: $x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2$

المصب3: $x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3$

المصب4: $x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4$

و إختصارا الكميات المطلوبة في كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j$$

و يعني هذا أن الكميات المستقبلة من طرف كل مصب من كل منبع يجب أن تساوي طلب كل مصب.

و بما أن الهدف هو تدنئة التكاليف في ظل هذه الشرط لذلك فإن الصياغة الرياضية لمسألة النقل حسب الإفتراض السابق تكون كما يلي:

$$\text{Min}: Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$ ق

$$s/c\begin{cases}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i\\ \sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j\\ \sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j\\ x_{ij}\geq 0\\ c_{ij}\geq 0\end{cases}$$

و عموما تكون: $j=1,2,3.....n$

$i=1,2,3.....m$

حيث: n عدد المصبات و m عدد المنابع.

مثال6-1: تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة و هي:

-وحدة موزاية، تنتج قارورات المياه المسماة "موزاية" بطاقة قصوى هي 55 .10^3 قارورة شهريا.

- وحدة سعيدة، تنتج قارورات المياة المسماة "سعيدة" بطاقة قصوى هي 45 .10^3 قارورة شهريا.

- وحدة باتنة، تنتج قارورات المياة المسماة "باتنة" بطاقة قصوى هي 20 .10^3 قارورة شهريا.

يتم التسويق في إتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـ 50 .10^3 قارورة شهريا.
- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها بـ 30 .10^3 قارورة شهريا.
- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـ 40 .10^3 قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج الى كل مقر ناحية من النواحي هي بالدينار كما يلي:

مصب / منبع	الوسط	الشرق	الغرب
موزاية	1	4	5
سعيدة	5	7	3
باتنة	10	8	9

جدول6-4

تبحث المؤسسة عن خطة لتموين مختلف النواحي بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: 1- إثبت أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل.

2-شكل جدول المسألة.

الإجابة: السؤال 1:

1- هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجيهها من كل منبع الى كل مصب بغية تدنئة التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة و بالتالي فإنه توجد دالة هدف هي على الشكل التالي:

$$Min: Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

2- مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 55+45+20=120$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 50+40+30=120$$

يعني هذا أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.

كميات العرض و كميات الطلب غير سالبة.

و عليه يمكن القول بأن هذه المسألة تخضع لنوع مسائل النقل.

السوال2: يمكن إجمال معطيات المسألة في الجدول التالي:

منبع / مصب	الوسط	الشرق	الغرب	العرض.10^3 قا
موزاية	x_{11} (1)	x_{12} (4)	x_{13} (5)	55
سعيدة	x_{21} (5)	x_{22} (7)	x_{23} (3)	45
باتنة	x_{31} (10)	x_{32} (8)	x_{33} (9)	20
الطلب. 10^3 قا	40	30	50	120

جدول6-5

رابعا: طرق حل مسائل النقل: تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين:

الأولى هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول و تتم بعدة طرق منها، طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكلفة الدنيا، طريقة فوقل.

الثانية و هي مرحلة إختبار الحل و سيرورة تحسينه، و تتم بأحدى الطريقتين، الأولى تعرف ب**طريقة التخطي** (Stepping-stone)، و الثانية تعرف ب**طريقة التوزيع المعدل** (MODI).

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في الجدول الى الأعلى و الى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك بإتباع منهجية المثال التالي:

مثال6-2: أوجد حل المثال 6-1 بطريقة الزاوية الشمالية الغربية- أسلوب التخطي.

الإجابة: يتم توزيع الكميات من مختلف المنابع الى مختلف المصبات كما يلي:

أ-نبدأ بأول خلية في الجدول و هي الخلية العلوية اليسرى **"الشمالية الغربية"**، المقابلة لمنبع1 مصب1، نجد أن إحتياجات المصب1 هي 40 ألف وحدة، بينما حجم ما يعرضه المنبع1 هو 55 ألف وحدة ، لذلك فيمكن لهذا المصب أن يتحصل على كامل إحتياجاته المقدرة بـ 40 ألف وحدة من المنبع 1 ويتشبع بذلك العمود الأول كلية، بينما يتبقى للمنبع1 كمية تقدر بـ 15 ألف وحدة. (تابع التوزيع من خلال الجدول6-6).

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i	باقي	باقي
منبع1	(1) **40**	(4) **15**	(5)	55	15	0
منبع2	(5)	(7) **15**	(3) **30**	45	30	0
منبع3	(10)	(8)	(9) **20**	20	0	
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

جدول6-6

ب- ننتقل الى الخلية الموالية و هي المقابلة للمنبع1 و المصب2، مقابلها نجد كمية عرض تقدر بـ 15 ألف وحدة و هي المقدار المتبقي بعد تسويق المنبع1 لجزء من معروضه الى المصب1، بينما إحتياجات المصب2 تقدر بـ30 ألف وحدة، لذلك فإن أقصى كمية يمكن توجيهها من المنبع1 الى المصب2 هي 15ألف وحدة، وحينئذ تتبقى إحتياجات مقدارها 15 ألف وحدة ينبغي على المصب2 أن يتحصل عليها من منبع آخر وهذا في الوقت الذي يستنفذ فيه المنبع1 كل الكميات التي كان يعرضها.

ج- ننتقل الى خلية أخرى، الخلية1،3 لايمكن الإنتقال إليها لأنه لايوجد للمنبع1 ما يسوقه، الخلية 2،1 لايمكن الإنتقال إليها لأن المصب1 لبيت كل إحتياجاته، و الخلية المرشحة الآن هي الخلية المقابلة للمنبع2 و المصب2، حيث أن طاقة العرض هي 45 ألف وحدة، بينما الطلب غير الملبى لحد الآن، للمصب2 هو 15 ألف

وحدة و هي كمية يمكن تلبيتها مـــن المنبـــع2 و يتبقـــى لــه بعــد ذلك 30 ألف وحدة، و يتشــبع المصـــب2 كليـــة.

د- ننتقـــل بعـــذ ذلـــك الى الخليـــة المواليـــة و هـــي المقابلـــة للمنبع2 والمصب3 ، حيث قيمة العـــرض المتبقـــي هـــي 30 ألـــف وحـــدة بينما قيمة الطلــــب هـــي 50 ألـــف وحـــدة، لذلـــك فأكـــبر كميـــة يمكن الحصول عليـــها مـــن المنبـــع2 هـــي 30 ألـــف وحـــدة و تتبقـــى قيمة طلب مقدارها 20 ألف وحـــدة، في حـــين يكـــون المنبـــع 2 قـــد سوق كل ما كان يعرضـــــه.

هـــ- ننتقـــل الى الخليـــة 3،1 حيـــث لا يمكـــن للمصـــب3 أن يسوق اليـــها لأن إحتياجاتهـــا لبييـــت كليـــة، الخليـــة 3،2 أيضـــا لايمكن للمنبع3 أن يسوق اليـــها شـــيئا لأن إحتياجاتهـــا لبيـــت كليـــة، وتتبقى بالتـــالي الخليـــة المقابلـــة للمنبـــع3 و للمصـــب3، حيـــث أن الكميات المعروضـــة هـــي 20 ألـــف وحـــدة بينمـــا كميـــات الطلـــب المتبقي للمصب3 هـــي أيضـــا 20 ألـــف وحـــدة، و بذلـــك يتـــم تلبيـــة كل إحياجـــات المصـــب3 و في نفـــس الوقـــت يتـــم تســـويق كـــل عرض المنبـــع3.

و تكون كل الكميـــات المعروضـــة للمؤسســـة قـــد ســـوقت، و لبيت كل إحتياجات الجـــــهات الثـــلاث.

ونحصـــل بذلـــك علىجـــدول الحـــل الأساســـي الأول هـــو الجـــدول 7-6.

و فيه نجـــد:

$x_{11}=40$: و تعـــني أن منبـــع1(موزايـــة) يمـــون ناحيـــة الوســـط بـــ40 ألف وحدة شـــــهريا.

$x_{12}=15$: و تعني أن منبـــع1 (موزايـــة) يمـــون ناحيـــة الشـــرق بـــ 15 ألف وحدة شـــــهريا.

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	(1) **40**	(4) **15**	(5)	55
منبع2	(5)	(7) **15**	(3) **30**	45
منبع3	(10)	(8)	(9) **20**	20
b_j	40	30	50	120

جدول6-7

$x_{22}=15$:و تعـــني أن منبـــع2(ســـعيدة) يمـــون ناحيـــة الشـــرق بـــ 15ألف وحدة شـــــهريا.

$x_{23}=30$:و تعني أن منبـــع2 (ســـعيدة) يمـــون ناحيـــة الغـــرب بـــ 30 ألف وحدة شـــــهريا.

$x_{33}=20$: و تعـــني أن منبـــع 3(باتنـــة) يمـــون ناحيـــة الغـــرب بـــ20 ألف وحدة شـــــهريا.

و بقيـــة المتغـــيرات قيمـــها معدومـــة أي: $x_{13}=x_{21}=x_{31}=x_{32}=0$

أما التكلفة التي تتحملـــها المؤسســـة فـــهي:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 1\times 40+4\times 15+7\times 15+3\times 30+9\times 20 = 475 \text{ و.نقدية}$$

و تجدر الإشارة الى أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هو:

$$\boxed{m+n-1}$$

حيث: m عدد المنـــابع (الأســـطر)، n عـــدد المصبـــات (الأعمـــدة).

و هي القاعدة الأساسية التي ينبغي توفرها لأجل سيرورة إيجاد الحل الأمثل.

و بالنظر الى مثالنـــا فـــإن عـــدد المتغـــيرات الداخلـــة في الحـــل يجـــب أن تســـاوي: 3+3-1=5

و هو بالفعل عدد المتغيرات الداخلة في الحل كما يعرضها *الجدول 6-7*.

2-صيرورة الحل الأمثل: إن الحل المتوصل إليه هو أول حل أساسي ، لكننا لانعلم إذا كان حلا أمثلا أم هو غير أمثل. لمعرفة ذلك فإن هناك طريقتين مستعملين كما أشير الى ذلك من قبل ، الأولى هي طريقة التخطي (Stepping-stone)، أما الثانية فهي معروفة بطريقة التوزيع المعدل (MODI).

أ- طريقة التخطي (Stepping-stone): فكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير الداخلة في الحل و التي من شأنها أن تدني التكلفة الكلية في حالة إدخالها الى الحل الأساسي، لذا ينبغي إختبار الخلايا غير الداخلة في الحل إذا ما كان إمرار أي وحدة عبرها يؤدي الى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما نصطلح عليه **بالتكاليف الحدية**(تكاليف الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل و ذلك كما في منهجية حل المثال السابق على النحو التالي:

- **الخلية (3،1)**: هي خلية غير داخلة في الحل، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى إختلال شروط توازن المسألة و منها $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i$ على مستوى السطر الأول، و $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$ على مستوى العمود الثالث، لأن مجموع السطر الأول يصبح 51، لذلك ينبغي طرح القيمة 1- من الخلية (3،2)، غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث إختلالا على مستوى السطر الثاني لأن المجموع يصبح 44 بدلا

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	1 / 40	4 / 15 (1-)	5 / (1+)	55
منبع2	5	7 / 15 (1+)	3 / 30 (1-)	45
منبع3	10	8	9 / 20	20
b_j	40	30	50	120

جدول6-8

من 45 ، لذلك نضيف القيمة 1 الى الخلية (2،2)، غير أن ذلك أيضا يحدث إختلالا على مستوى العمود2 فيصبح مجموعه 31 بدلا من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة1 من الخلية (2،1)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، و الخلاصة أننا نضيف و نطرح المقدار 1 على مدار إتجاه المسار كما هو واضح في الجدول 6-8.

إذا رمزنا لتكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i الى المصب j بـ σ_{ij} فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع1 الى المصب3 هي :

$$\sigma_{13}=5\times(1)+3\times(-1)+7\times(1)+4\times(-1)=5$$

و يعني أن هذه الخلية لو تدخل في الحل الأساسي فإن كل وحدة منقولة من المنبع1 الى المصب3 سترفع التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية، فإذا تم نقل 10 وحدات مثلا من المنبع1 الى المصب3 فإن ذلك سيرفع التكلفة الإجمالية بمقدار 50 وحدة نقدية، و عليه فإن هذه الخلية ينبغي تجنبها.

- **الخلية (1،2)**: هي خلية غير داخلة في الأساس، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي أيضا إلى إختلال شروط توازن المسألة على مستوى السطر الثاني، وعلى مستوى العمود الأول، لأن مجموع السطر الثاني يصبح 46 و مجموع العمود الأول يصبح 41، لذلك ينبغي طرح القيمة -1 من الخلية(1،1)، غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث إختلالا على مستوى السطر الأول لأن المجموع يصبح 54 بدلا من 55 ، لذلك نضيف القيمة 1 الى الخلية (1،2)، غير أن ذلك أيضا يحدث إختلالا على مستوى العمود2 فيصبح مجموعه 31 بدلا من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة1 من الخلية (2،2)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، والخلاصة هي أيضا أننا نضيف ونطرح المقدار 1 على مدار إتجاه المسار كما هو واضح في الجدول 6-9.

جدول6-9

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	1 1- 40	4 1+ 15	5	55
منبع2	5 1+	7 1- 15	3 30	45
منبع3	10	8	9 20	20
b_j	40	30	50	120

و عليه تصبح تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 2 الى المصب1 هي:

$$\sigma_{21}=5\times(1)+1\times(-1)+4\times(1)+7\times(-1)=1$$

و يعني هذا أيضا أن كل وحدة منقولة من المنبع2 الى المصب1 ستزيد التكلفة بوحدة نقدية واحدة، فإمرار 10 وحدات مثلا سيزيد التكلفة بـ 10 وحدات نقدية (10×1).

و بالمثل يتم حساب التكاليف الحدية للخلايا الأخرى.

- **الخلية (1،3)**: بالمثل يتم إيجاد المسار بالنسبة لهذه الخلية، و ينبغي أيضا الحفاظ على التوازن سطريا وعموديا، ويلاحظ أن المسار هنا أطول، و هذا ما تطلبه شرط الحفاظ على التوازن. لاحظ أنه عندما أضفنا الكمية 1في الخلية (1،3)، لم نقم بطرحها من الخلية (2،1) للحفاظ على التوازن، لأن هذا يجعل x_{21} سالب و هو ما يتعارض مع شروط مسائل النقل التي يفترض فيها أن المتغيرات لا تأخذ قيما سالبة، و هذا ما جعلنا نطرح القيمة1 من الخلية (1،1)، وبالمثل بالنسبة للبقية، نضيف و نطرح مع الحفاظ على التوازن أفقيا و عموديا مع الحرص على عدم سالبية المتغيرات.

جدول6-10

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	1 1- 40	4 1+ 15	5	55
منبع2	5	7 1- 15	3 1+ 30	45
منبع3	10 1+	8	9 1- 20	20
b_j	40	30	50	120

و عليه فإن التكلفة الحدية لهذا المسار هي:

$$\sigma_{31}=10\times(1)+1\times(-1)+4\times(1)+7\times(-1)+3\times(1)+9\times(-1)=0$$

و يعني هذا أن هذه الخلية لاتؤثر على التكلفة في حالة إدخالها الى الأساس، إذ أنها لاتنقص منها و لاتزيد فيها.

الخليـــة (2،3): بنفـــس الطريـــقة تمامـــا نجـــد أن التكلفـــــة الحديـــة للمسار المتولد عن هـــــذه الخليـــة هـــو:

$\sigma_{32}=8-7+3-9=-5$ و يعني هذا أن نقل كل وحــــــدة من المنبـــع3 الى المصـــب2 يـــؤدي الـــى خـــفـــض التكاليف الإجـــمالية بـــ5 وحدات نقديـــة، فنقل 15 وحدة مثلا من المنبع 3 الى المصب2 سيؤدي الى خفض التكـــاليف الإجـــمالية بـــ 75 وحدة نقديـــــة،

جدول6-11

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	[1] **40**	[4] **15**	[5]	55
منبع2	[5]	[7] 1− **15**	[3] 1+ **30**	45
منبع3	[10] 1+	[8] 1+	[9] 1− **20**	20
b_j	40	30	50	120

أي أن التكلفة الإجمالية تصبح 400 بدلا من 475 وحدة نقدية.

بإجمال التكاليف الحدية المحصـــــل عليـــها و هـــي:

$\sigma_{32}=-5$	$\sigma_{31}=0$	$\sigma_{21}=1$	$\sigma_{13}=5$

نجد أن الخليـــــة الـــتي تعطـــي تخفيضـــا للتكلفـــة الإجماليـــة هـــي (2،3)، لذلك نقـــول أن الحـــل الأساســـي الأول هـــو غـــير أمثـــل، و عمومـــا **نقول أن الحـــل غـــير أمثـــل إذا كـــانت إحـــدى أو بعـــض التكـــاليف الحدية سالبة**، و الخليـــة المرشـــحة للدخـــول الى الأســـاس هـــي المقابلة لأكبر تكلفة حديـــة ســـالبة.

و عليـــه فـــالحل الأساســـي الأول يتطلـــب الأمـــر تحســـينه بإدخـــال الخلية (2،3) الى الأساس، فكيـــف يتـــم ذلـــك؟.

يتم ذلك بـــإحداث تغيـــيرات علـــى طـــول قيـــم المتغـــيرات المتواجـــدة على زوايـــا المســـار **بإضافـــة وطـــرح أصغـــر قيمـــة متواجـــدة علـــى الزوايا الســـالبة (الزوايـــا الـــتي تم طـــرح القيمـــة 1 منـــها)**، و هـــذا لتجنـــب إحـــداث قيـــم ســـالبة لبعـــض المتغـــيرات. في مثالنـــا القيـــم

المتواجـــــدة في الزوايـــــا السالبـــــة هــــــي : $x_{21}=15$ و $x_{33}=20$

،

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	[1] **40**	[4] **15**	[5]	55
منبع2	[5]	[7] 15− **15**	[3] 15+ **30**	45
منبع3	[10] 1+	[8] 15+	[9] **20** 15−	20
b_j	40	30	50	120

جدول6-12

لـــذلك المتغيرة الـــتي تخـــرج مـــن الأســـاس هـــي x_{21} حيـــث يجـــب أن تتحول الى قيمـــــة معدومـــــة بـــإحداث التغيـــير كمـــا في الجـــدول 6-12 جـــواره.

بإجراء عملية الجمع في الخلايا الـــتي حصـــل فيـــها تغيـــير نحصـــل علـــى جدول الحـــل الأساســـي الثـــاني كمـــا هـــو واضـــح في الجـــدول 6-13. ويصبح مخطط التمويـــن الجديـــد كمـــا يلـــي:

- $x_{11}=40$: أي أن المنبـــع الأول يمـــون المصـــب الأول بـــــ 40 ألف وحـــدة.
- $x_{12}=15$: أي أن المنبـــع الأول يمون المصـــب الثـــــاني بـــــ 15 ألف وحـــدة.
- $x_{23}=45$: أي أن المنبـــع الثـــاني يمـــون المصـــب الثـــالث بـــــ 45 ألف وحـــدة.
- $x_{32}=15$: أي أن المنبـــع الثـــالث يمـــون المصـــب الثـــاني بـــــ 15 ألف وحـــدة.

- $x_{33}=5$: أي أن المنبـــع الثـــالث يمـــون المصـــب الثـــالث بـــــــ 5 ألاف وحـــدة.

أما بقية المتغيرات فـــــهي معدومـــة.

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
منبع2	(5)	(7)	(3) 45	45
منبع3	(10)	(8) 15	(9) 5	20
b_j	40	30	50	120

جدول6-13

بما أننا وجدنا التكلفة الحدية للخلية التي دخلت الحل هي $\sigma_{32}=-5$ لـــذلـــك فـــإن التكلفة الإجماليـــة الـــتي تتحملها المؤسسة وفـــق المخطط الجديـــد ســـوف تنخفـــض بمقدار $\sigma_{32}\times 15$ أي بمقدار 75ألف وحدة نقدية.

و عليـــه فعنـــد حســـاب تكلفـــة النقـــل الإجماليـــة يجـــب أن نجدهـــا تســـاوي 400 وحـــدة نقديـــة لأن التكلفـــة في الحـــل الأساســـي الأول هي 475 ألف وحدة نقدية. و لـــنرى إذا كـــان هـــذا صحيحـــا:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=1\times 40+4\times 15+3\times 45+8\times 15+5\times 9=400$$

و عليه فإن التكلفة الجديدة تساوي بالفعل 400 ألف وحدة نقدية.

و علينا أن نختبر مـــن جديـــد الحـــل المتوصـــل إليـــه إذا كـــان أمثليـــا أم لازال قابلا للتحسين و هـــذا بإســـتعمال نفـــس الطريقـــة السابقـــة

جدول6-14

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
منبع2	(5)	(7)	(3) 45	45
منبع3	(10)	(8) 15	(9) 5	20
b_j	40	30	50	120

أي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا الفارغة و التي تظهر مساراتهـــا في الجدول 6-14 أعلاه، أمـــا قـــيـــم التكاليف الحـــديـــة فهي:

$\sigma_{13}=5-9+8-4=0$ $\sigma_{21}=5-1+4-8+9-3=6$

$\sigma_{22}=7-3+9-8=5$ $\sigma_{31}=10-1+4-8=5$

بما أن كل التكاليف الحدية σij أصبحت غير سالبة لذلك نقـــول أن جـــدول الحل الأساسي الثاني هو جدول الحل الأمثل، و عليه فإن خطة النقل التي يجـــب على المؤسسة أن تطبقها هي التالية:

أ- وحـــدة موزايـــةتمون:

- منطقة الوسط بـــ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـــ 40 ألف دينار.
- منطقة الشرق بـــ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـــ 60 ألف دينار.

ب- وحدة ســـعيدة تمـــون:

- منطقة الغرب بـــ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـــ 135 ألف دينار.

ج- وحدة باتنـــة تمـــون :

- منطقة الشرق بـــ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـــ 120 ألف دينار.
- منطقة الغرب بـــ 5 ألاف وحدة بتكلفة تقدر بـــ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هـــي 400 ألف دينار خلال الفترة.

ب- **طريقة التوزيع المعدل (MODI):** نهاية فكرة هذه الطريقة هي نفسها نهاية فكرة طريقة التخطي، غير أن الإختلاف في المنهجية، إذ أن هذه الطريقة تفترض وجود مجهولين هما V_j و يعبر عن الأعمدة و U_i و يعبر عن الصفوف، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا، أي إذا كانت تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنبع i الى المصب j هي c_{ij} فيجب أن يكون:

$$U_i+V_j=c_{ij}$$

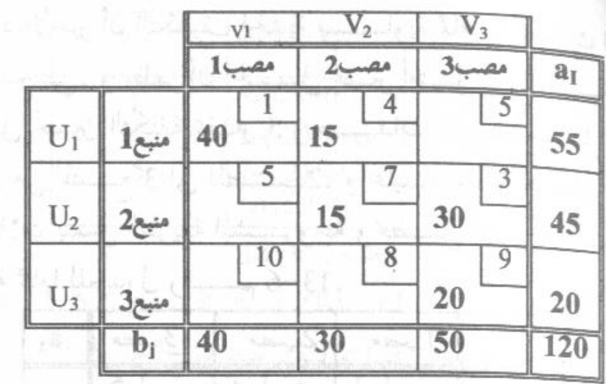
حيث i يرمز للصف الذي توجد فيه الخلية، و j يرمز للعمود الذي توجد فيه الخلية.و هذا بالنسبة لكل الخلايا الداخلة في الحل . ثم يتم إيجاد المجاهيل U_i و V_j و هذه هي الخطوة الأولى، تليها الخطوة الثانية و هي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي، و ذلك عن طريق المعادلة :

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$$

و هنا يبدأ التشابه مع الطريقة الأولى إذ أن القيم σ_{ij} التي نحصل عليها مساوية تماما لتلك التي نحصل عليها بطريقة التخطي، و تكون الخلايا ذات الإمتياز و التي من شأنها أن تدخل الحل و التي تحسن من التكلفة هي التي تأخذ تكلفتها الحدية أقل قيمة في الإتجاه السالب، و حينها يتم تحديد المسار و إجراء التغييرات تماما كما في الطريقة الأولى، و سنحاول أن نشرح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: 6-3: بإتباع أسلوب **التوزيع المعدل** أوجد الحل الأمثل لمسألة التمرين 6-1 و ذلك بإعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

إن طريقة الزاوية الشمالية الغربية المطبقة على المثال أعطتنا جدول الحل الأساسي الأول رقم 6-6. و الذي يصبح كما يلي:



		V1	V2	V3	
		مصب1	مصب2	مصب3	a_i
U_1	منبع1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
U_2	منبع2	(5)	(7) 15	(3) 30	45
U_3	منبع3	(10)	(8)	(9) 20	20
	b_j	40	30	50	120

جدول6-15

- **بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل:** لدينا $U_i+V_j=c_{ij}$ ، من خلالها نوجد المجاهيل U_i و V_j من خلال المعادلات التالية، مع فرض أن U_i لأول معادلة قيمتها صفر وهذا لتسهيل الحل:

- الخلية (1،1): $U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$
- الخلية (2،1): $U_1+V_2=4 \Rightarrow V_2=4$
- الخلية (2،2): $U_2+V_2=7 \Rightarrow U_2+4=7 \Rightarrow U_2=3$
- الخلية (3،2): $U_2+V_3=3 \Rightarrow 3+V_3=3 \Rightarrow V_3=0$
- الخلية (3،3): $U_3+V_3=9 \Rightarrow U_3+0=9 \Rightarrow U_3=9$

- **بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل:** و هي الخطوة الثانية، يتعين تقييم هذه الخلايا من خلال إيجاد التكاليف الحدية لكن بطريقة مختلفة عن طريقة التخطي، وذلك عن طريق المعادلة $\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$ ، و التي نحصل من خلالها على الجدول التالي:

الخلية	$\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$	σ_{ij}
U_1,V_3	5-0-0=5	5
U_2,V_1	5-3-1=1	1
U_3,V_1	10-9-1=0	0
U_3,V_2	8-9-4=-5	-5

جدول 6-16

يظهر في العمود الأخير أن التكاليف الحدية مساوية تماما لتلك المحصل عليها بطريقة التخطي. و يظهر أن الحل غير أمثل لأن الخلية (2،3)، سوف تؤدي الى تحسين التكلفة بمقدار 5 وحدات نقدية لكل وحدة تنقل عبرها أي من المنبع 3 الى المصب2. و عليه يتم تحديد المسار وإجراء التحويلات بنفس الطريقة المشروحة ونحصل على الجدول 6-17 و هومشابه تماما للجدول رقم 6-13.

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
منبع2	(5)	(7)	(3) 45	45
منبع3	(10)	(8) 15	(9) 5	20
b_j	40	30	50	120

جدول 6-17

من جديد نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و هذا بنفس المنهجية السابقة، حيث نفرض أيضا أن $U_1=0$ ، و نحصل على النتائج :

$$U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$$
$$U_1+V_2=4 \Rightarrow V_2=4$$
$$U_3+V_2=8 \Rightarrow U_3+4=8 \Rightarrow U_3=4$$
$$U_3+V_3=9 \Rightarrow 4+V_3=9 \Rightarrow V_3=5$$
$$U_2+V_3=3 \Rightarrow U_2+5=3 \Rightarrow U_2=-2$$

و في الخطوة الموالية نشكل جدول التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل و هو ما يظهره الجدول رقم 6-18 أدناه.

σ_{ij}	$c_{ij}-U_i-V_j$	الخلية
0	5-0-5=0	U_1,V_3
6	5-(-2)-1=6	U_2, V_1
5	7-(-2)-4=5	U2,V2
5	10-4-1=5	U_3, V_1

جدول 6-18

بما أن كل قيم σ_{ij} غير سالبة، لذلك فإن الجدول 6-17 هو جدول الحل الأمثل،ويتم شرحه تماما كما تم ذلك عند شرح جدول الحل الأمثل المحصل عليه بطريقة التخطي في الصفحة 95.

3- **طريقة التكلفة الدنيا:** تختلف هذه الطريقة عن الطريقة الأولى في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في تشبيع الخلايا إنطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم **التكلفة المساوية أو الموالية** و هكذا، حتى يتم إستفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي m+n-1 . ثم يتم بعد ذلك إختبار ما إذا كان الحل أمثلا أم لا بنفس طريقة سيرورة الحل كما عرضت في طريقة الزاوية الشمالية الغربية (طريقتي، التخطي أو التوزيع المعدل). ويتم توضيح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال6-4:أوجد الحل الأمثل لمسألة المثال 6-1 بإستعمال **طريقة التكلفة الدنيا** في إيجاد الحل الأساسي الأول و **طريقة التخطي** في سيرورة الحل.

إنطلاقا من الجدول رقم 6-5 للمثال المشار إليه، نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

- نبدأ الحل بالبحث عن أقل تكلفة في الجدول. أقل تكلفة هي 1 في الخلية (1،1)، العرض هو 55 ألف وحدة و الطلب هو 40 ألف وحدة، نشبع هذه الخلية بالقيمة 40 ألف و هي أنصى ما يمكن نقله الى المصب1 ، أي أن المنبع1 يلبي كل

إحتياجات المصب 1 البالغة 40 ألف وحدة ويتبقى لهذا المنبع عرض مقداره 15 ألف وحدة.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 3 و هي المقابلة للمنبع2 و المصب 3، لذلك يتم تشبيع الخلية (2،3)، حيث العرض هو 45 ألف بينما الطلب هو 50 ألف لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 45 ألف، يسوق المنبع2 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب3 قيمة 5 آلاف وحدة على تلبية كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي 4 و هي المقابلة للمنبع1 و المصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (1،2)، حيث العرض المتبقي هو 15 ألف وحدة بينما الطلب هو 30 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، و بذلك يسوق المنبع1 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب2 قيمة 15 ألف وحدة لم تلبى بعد.

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i	باقي	باقي
منبع1	(1) **40**	(4) **15**	(5)	55	15	0
منبع2	(5)	(7)	(3) **45**	45	0	
منبع3	(10)	(8) **15**	(9) **5**	20	5	0
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	5			
باقي		0	0			

جدول6-19

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي 5 في الخلية (1،3)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع1 سوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية الأخرى هي أيضا 5 في الخلية (2،1)، غير أن صف و عمود هذه الخلية معا مشبعان.

- التكلفة الموالية من حيث الترتيب التصاعدي هي7 في الخلية (2،2)، غير أنه لايوجد من أين نشبعها لأن المنبع2 سوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي هي 8 و هي المقابلة للمنبع3 والمصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (3،2)، حيث العرض هو20 ألف وحدة و الطلب المتبقى هو 15 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15ألف وحدة، وبذلك يتبقى للمنبع3 قيمة 5 آلاف وحدة غير مسوقة، بينما يحصل المصب2 على كل إحتياجاته.

- التكلفة الموالية هي 9 و هي المقابلة للخلية (3،3)، حيث العرض هو 5 آلاف وحدة والطلب أيضا هو 5 آلاف وحدة، لذلك يتم تشبيع سطر و عمود هذه الخلية في آن واحد.

و يتم بذلك تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كل الإحتياجات المطلوبة.

و نلاحظ أننا حصلنا على عدد من المتغيرات الداخلة الى الحل مساو الى $m+n-1$ وفي نفس الوقت حافضنا على توازن الجدول.

ونحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول **بطريقة التكلفة الدنيا** و هو:

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	(1) **40**	(4) **15**	(5)	55
منبع2	(5)	(7)	(3) **45**	45
منبع3	(10)	(8) **15**	(9) **5**	20
b_j	40	30	50	120

جدول6-20

سيرورة الحل الأمثل: سيرورة الحل تتم تماما كما جرت في حالة طريقة الزاوية الشمالية الغربية- طريقة التخطي، حيث يتم إيجاد التكاليف الحدية، في **حالة ما إذا كانت جميع التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة أكبر أو تساوي الصفر نكون قد توصلنا الى خطة الحل الأمثل**، و في الحالة المعاكسة ندخل الى الحل الخلايا التي تأخذ أقل قيمة في الإتجاه السالب ثم نجري التحويلات اللازمة كما تم شرح ذلك في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

و نلاحظ أن جدول الحل الأساسي الأول المتوصل إليه هو نفسه جدول الحل الأساسي الأمثل المتوصل اليه في طريقة الزاوية الشمالية الغربية (جدول 6-13)، حيث أن كل التكاليف الحدية المحسوبة غير سالبة، وهي:

$$\sigma_{13}=5-9+8-4=0$$
$$\sigma_{21}=5-1+4-8+9-3=6$$
$$\sigma_{22}=7-3+9-8=5$$
$$\sigma_{31}=10-1+4-8=5$$

و يتم شرح الجدول أيضا بنفس الطريقة.

تجدر الإشارة الى أنه أثناء **البحث عن الحل الأساسي الأول، وفي حالة تساوي تكلفتين نعطي الأولوية للتي تكون مرفقة بأكبر كمية لكونها تؤدي الى تكلفة إجمالية أقل.**

ميزة طريقة التكلفة الدنيا أنها تقربنا أكثر الى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي تخضع للحظ.

4- طريقة فوقل: و تسمى أيضا طريقة الجزاء ، في هذه الطريقة يتم إيجاد **الحل الأساسي الأول** بإتباع المنهجية التالية:

1- نوجد الفرق بين أدنى تكلفة و التكلفة الموالية لها من حيث الصغر، وهذا سطريا و عموديا. تسمى هذه الفروقات **بأرقام فوقل.**

2- نبحث عن أكبر رقم من أرقام فوقل المحسوبة في الخطوة الأولى على مستوى الأسطر و الأعمدة، ثم نبحث عن أقل تكلفة مقابلة له في السطر أو العمود الذي ينتمي إليه هذا الرقم و ندخل الخلية التي تنتمي اليها الأقل تكلفة الى الحل، ليتشبع إما السطر أو العمود حسب المعطيات.

3- نعود من جديد الى الخطوة الأولى مع تفادي إعادة إيجاد الفروقات بالنسبة للأسطر أو الأعمدة المشبعة، و هذا حتى تصريف كل المعروض و تلبية كل الطلب. و نكون بذلك قد حصلنا على جدول الحل الأساسي الأول.

4- بعد إيجاد الحل الأساسي الأول نتبع نفس خوارزمية سيرورة الحل كما تم عرضها في طريقة الزاوية الشمالية الغربية بإحدى الطريقتين إمّا طريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل..

ملاحظة:

1- في حالة وجود قيمتين عظميتين من أرقام فوقل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنيويتين ، و نختار أقل تكلفة مقابلة ونشبع الخلية التي تنتمي إليها، وفي حالة ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضا متساويتين نختار أحدهما لاعلى التعيين.

2- عند حساب أرقام فوقل فإنه في حالة وجود تكلفتين دنيويتين متساويتين فإننا نحسب أيضا الفرق بينهما و هو صفر.

مثال6-5: أوجد الحل الأمثل لمسألة المثال 6-1 بإستعمال طريقة فوقل-أسلوب التخطي.

إنطلاقا من جدول المسألة رقم 6-5 نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

الفروقات الأولى:

- **الصف الأول:** أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 4 الفرق بينهما هو 3.
- **الصف الثاني:** أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5، الفرق بينهما هو 2.
- **الصف الثالث:** أقل تكلفة هي 8 و التي تليها هي 9، الفرق بينهما هو1.
- **العمود الأول** : أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 5، الفرق بينهما هو 4.
- **العمود الثاني:** أقل تكلفة هي 4 و التي تليها هي 7، الفرق بينهما هو 3.
- **العمود الثالث:** أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5، الفرق بينهما هو2.

نسجل هذه الفروقات في الجدول(6-21)، أي في خانات الفرق1 سطريا و عموديا.

أكبر قيمة في الفرق1 سطريا و عموديا هي 4 موجودة في العمود الأول، و عليه نبدأ بتشبيع الخلية المقابلة لأقل تكلفة وهي الخلية (1،1)، حيث أن العرض هو 55 والطلب 40، لذلك فأقصى قيمة يمكن إعطاءها لهذه الخلية هي 40، ويشبع بذلك العمود الأول، بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 بالنسبة للمنبع1.

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i	فرق1	فرق2	فرق3	فرق4
منبع1	1 / **40**	4 / **15**	5	**55**	3	1	1	
منبع2	5	7	3 / **45**	**45**	2	4	1	
منبع3	10	8 / **15**	9 / **5**	**20**	1	1		1
bj	**40**	**30**	**50**	**120**				
فرق1	4	3	2					
فرق2		3	2					
فرق3		4	4					

جدول6-21

الفرقi: هو الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها على مستوى الأعمدة.
الفرقj: هو الفرق بين أقل تكلفة و التكلفة التي تليها على مستوى الأسطر. تظهر فروقات التكاليف بأرقام صغيرة.

نعود من جديد و نحسب الفروقات2، مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة و الأسطر و الأعمدة المشبعة.

الفروقات الثانية:

نعود من جديد بنفس المنهجية السابقة، نحسب أرقام فوقل وندونها في عمود أو سطر الفرق2 كما يظهر في الجدول أعلاه، دون الأخذ بعين الإعتبار العمود الذي تشبع، حيث نجد أن أكبر رقم من أرقام فوقل هو 4 على مستوى السطر2، وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (2،3)، بما أن الكميات المعروضة عندها هي 45 و المطلوبة هي 50، لذلك نوجه لها الكمية 45 و يشبع بذلك السطر الثاني و يبقى إحتياج مقداره 5 للعمود الثالث.

الفروقات الثالثة:

نحسب من جديد أرقام فوقل، و نجد أكبر رقم هو 4 على مستوى العمودين 2 و 3، غير أننا نختار العمود الثاني لإحتضانه أقل تكلفة، حيث المعروض المتبقي هو 15 و المطلوب هو 30، لذلك نوجه الكمية 15 و يشبع بذلك السطر الأول و يبقى المقدار 15 إحتياج في العمود الثاني.

الفروقات الرابعة:

يبقى فرق وحيد ومقداره 1 على مستوى السطر الثالث، حيث أقل تكلفة تقابله هي 8، لذلك يوجه للخلية (3،2) ما مقداره 15 و يبقى عرض مقداره 5، يوجه في المرحلة الموالية للخلية (3،3).

و يظهر الحل الأساسي الأول بطريقة فوقل كما هو واضح في الجدول 6-22 أدناه.

و واضح أن عدد الخلايا الداخلة في الحل تساوي الى m+n-1 و هو 5.

	مصب1	مصب2	مصب3	ai
منبع1	1 40	4 15	5	55
منبع2	5	7	3 45	45
منبع3	10	8 15	9 5	30
bj	40	30	50	120

جدول6-22

و يبقى أن نختبر الآن إذا ما كان الحل أمثلا أو هو قابل للتحسين و ذلك عن طريق التكاليف الحدية كما جرى شرحها في سيرورة الحل في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.وعليه تكون التكاليف الحدية كما يلي:

$\sigma_{31}= 5-9+8-4=0$

$\sigma_{21}=5-3+9-8+4-1=6$

$\sigma_{22}=7-3+9-8=5$

$\sigma_{33}=10-8+4-1=5$

يلاحظ أن كل التكاليف الحدية غير سالبة وبالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل لكنه ليس وحيد و تفسيره كما يلي:

أ- وحدة موزاية تمون:

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.
- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 60 ألف دينار.

ب- وحدة سعيدة تمون:

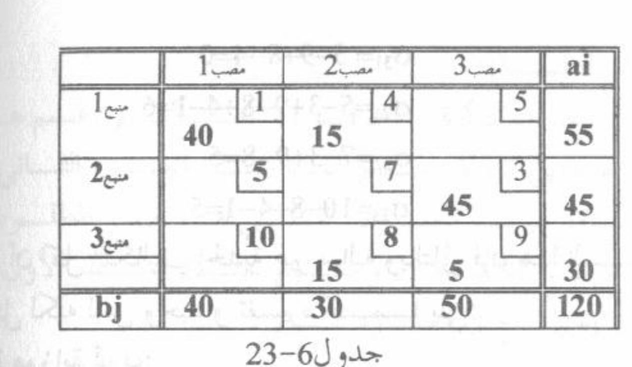
- منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج- وحدة باتنة تمون :

- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.
- منطقة الغرب بـ 5 آلاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.

غير أن هذا الحل **ليس وحيدا** إذ بإمكاننا أن نجد حلا أمثلا آخر بنفس التكلفة الإجمالية ما دام أن التكلفة الحدية للخلية (3،1) تساوي الى الصفر، بمعنى أنه يمكن إدخالها الى الحل الأمثل دون أن يحدث أي تغيير على التكلفة الإجمالية، وبإيجاد المسار و إجراء التحويلات نجد الحل الثاني الذي يظهره الجدول 6-23 أدناه.



	مصب1	مصب2	مصب3	ai
منبع1	1 / 40	4 / 15	5	55
منبع2	5	7	3 / 45	45
منبع3	10	8 / 15	9 / 5	30
bj	40	30	50	120

جدول6-23

حيث يعطي نفس التكاليف الإجمالية الدنيا و هي 400 ألف دينار.

تلخيص خوارزمية الحل.

1- بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث :

-تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع الى كل مصب.

- كميات عرض كل منبع، و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب.

- نوجد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق، الزاوية الشمالية الغربية أو التكلفة الدنيا أو فوقل.

- يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط: M+N-1

- نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا إما بطريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل.

نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل $\sigma_{ij} \geq 0$.

- إذا كان الحل غير أمثل نحسنه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة.

إذا كان الحل أمثلا نتوقف ونشرحه.

خامسا: حالات خاصة في مسائل النقل: من الحالات الشائعة التي يمكن مصادفتها في مسائل النقل عدم تساوي العرض مع الطلب، و حالة التفكك.

1- عدم تساوي العرض مع الطلب: إن إيجاد الحل الأساسي الأول، و إيجاد الحل الأمثل يتطلب شرطا أساسيا و هو **تساوي العرض مع الطلب**، أي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو الطلب أكبر من العرض، و في هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا، و ذلك كما يلي:

- حالة العرض أقل من الطلب، أي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ينبغي إضافة منبع (سطر) خيالي الى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، و تكاليف النقل من هذا المنبع الى أي مصب نفترضها معدومة.

- حالة العرض أكبر من الطلب، أي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ينبغي إضافة مصب (عمود) خيالي الى جدول المسألة، وتكاليف النقل من أي منبع الى هذا المصب نفترضها معدومة.

في الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول ثم الحل الأمثل بصفة عادية، ثم نحذف في النهاية السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

2- حالة التفكك: و نعني بها أن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أساسي لاتساوي: m+n-1 و هو شرط أساسي لإيجاد مسارات إختبار الحل، وللتخلص من هذا المشكل أيضا نلجأ الى التحايل، و ذلك بوضع خلية تصورية - أو أكثر حسب الحالة- داخلة في الحل نفترض قيمتها تساوي ε، أي قيمة بجوار الصفر، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأمثل، ونهملها تماما في النهاية بإعتبارها قيمة مساعدة فقط، و يتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأساسي الأول أوفي جداول الحل الموالية.

مثال6 -6: مؤسسة لها ثلاثة مصانع متجانسة الإنتاج، مكلفة بتموين ثلاثة مخازن في جهات متباعدة، إذا علمت أن كميات عرض كل مصنع و طاقات إستقبال كل مخزن، و تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار من كل مصنع الى كل مخزن معروضة في الجدول أدناه:

	(1)	(2)	(3)	ai
(1)	1	2	3	60
(2)	5	6	7	20
(3)	9	8	4	30
bj	50	50	30	110 / 130

جدول6-25

المطلوب: أوجد أفضل خطة للنقل بطريقة **التكلفة الدنيا** وأسلوب **التوزيع المعدل**.

يلاحظ أن مجموع العرض هو: 110، ومجموع الطلب هو: 130، أي أننا أمام حالة عدم تساوي العرض مع الطلب، والفارق بينهما هو 20 وحدة. لذلك تتم إضافة منبع خيالي (سطر) بعرض قيمته 20، و بتكاليف نقل صفرية، و نحصل بذلك على الجدول 6-26.

	(1)	(2)	(3)	ai
(1)	1	2	3	60
(2)	5	6	7	20
(3)	9	ε 8	4	30
خيالي (4)	0	0	0	20
bj	50	50	30	130

جدول6-26

بإستخدام طريقة التكلفة الدنيا نحصل على جدول الحل الأساسي 6-27 والذي تظهر فيه مختلف مراحل إيجاده.

و لعل ما يلفت الإنتباه و يجب التوقف عنده، هو أنه عند وصولنا الى تشبيع الخلية (3،3) التي تنتمي إليها التكلفة 4، نجد أن السطر و العمود يتشبعان في آن واحد، قبل نفاذ كل العرض و تلبية كل الطلب، و هي الحالة التي تحيلنا على حل متفكك ، لذلك يتم تجنب هذه الحالة بتشبيع إما السطر فقط أو العمود فقط، و في مثالنا إفترضنا بقاء قيمة صغيرة جدا بجوار الصفر كعرض للمنبع 3، ويتم التعامل معها وكأنها قيمة عادية موجبة، و هذا حتى يكون عدد الخلايا

الداخلة في الحل يساوي $m+n-1$ أي 6. ويلاحظ أنه لو لم نلجأ الى هذه الحيلة لوجدنا **الحـــل مـــتفكـــك** أي $m+n-1$ يساوي 5 و ليس 6.

	(1)	(2)	(3)	ai	باقي	باقي
(1)	[1] 50	[2] 10	[3]	60	10	0
(2)	[5]	[6] 20	[7]	20	0	
(3)	[9]	[8] ε	[4] 30	30	ε	0
(4)	[0]	[0] 20	[0]	20	0	
bj	50	50	30	130		
باقي	0	30	0			
باقي		20				
باقي		0				

جدول6–27

وعليه فإن الحل الأساسي الأول يظهر في الجدول 6–28 و هو يتضمن سطر خيالي و قيمة إفتراضية في الخلية (3،2).

و الآن نختبر الحل إذا كان أمثلا أم هو قابل للتحسين بأسلوب **التوزيع المعدل** كما هو مطلوب.

– إيجاد: $U_i+V_j=C_{ij}$ للخلايا المملوءة:

بإفتراض: $U_1=0$ نجد:

$$U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$$
$$U_1+V_2=2 \Rightarrow V_2=2$$
$$U_2+V_2=6 \Rightarrow U_2=4$$
$$U_3+V_2=8 \Rightarrow U_3=6$$
$$U_3+V_3=4 \Rightarrow V_3=-2$$
$$U_4+V_2=0 \Rightarrow U_4=-2$$

– إيجاد: $\delta_{ij}=C_{ij}-U_i-V_j$ للخلايا الفارغة:

$\delta_{13}=3-U_1-V_3=3-0+2=5$
$\delta_{21}=5-U_2-V_1=5-4-1=0$
$\delta_{23}=7-U_2-V_3=7-4+2=5$
$\delta_{31}=9-U_3-V_1=9-6-1=2$
$\delta_{41}=0-U_4-V_1=0+2-1=1$
$\delta_{43}=0-U_4-V_3=0+2+2=4$

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	[1] 50	[2] 10	[3]	60
(2)	[5]	[6] 20	[7]	20
(3)	[9]	[8] ε	[4] 30	30
خيالي (4)	[0]	[0] 20	[0]	20
b_j	50	50	30	130

جدول6–28

بما أن كل التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة غير سالبة لذلك فإن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل لكنه غير وحيد لكون أن التكلفـــة الحديـــة للخليـــة (1،2) تساوي الصفر، و يكون جدول الحل الأمثل هو:

	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	[1] 50	[2] 10	[3]	60
(2)	[5]	[6] 20	[7]	20
(3)	[9]	[8]	[4] 30	30
b_j	50	50	30	

جدول 6–29.

و يلاحـــظ أننا أهملنا سطـــر المنبع الخيالي و القيمـــة ε على إعتبار أنهـــما مساعـــدان فقط، و تكون التكلفة الدنيا التي تتحملها المؤسسة هي :

$Z=50+20+120+120=310$ دينار.

و يلاحظ كذلك أن كل المصانع صرفت معروضاتها إلاّ أنه علــى مستوى الطلب يبقى المستودع الثاني في حالة عجز يقدر بـــ 20 وحدة.

سادسا: الإستخدامات الأخرى لمسائل النقل: تستخدم مســائل النقــل في العديد من المجاهيل الإقتصادية الهادفة الى التدنئة، و من أمثلة ذلـــك، تمويــل المشاريع، إذ يتم ذلك عادة عن طريق الإقتراض من البنوك مقابل أسعار فائدة، كما في المثال التالي:

مثال 6-7: مـــصرف تجاري له ثلاث وحدات بنكيـــة ببلدان مختلفة بإمكانه تمويل 4 مشاريع إستثمارية متفرقة، بأسعار فائـــدة بالنسبة المائوية يوضحـــها الجدول التالي:

	مشروع1	مشروع2	مشروع3	مشروع4
وحدة1	10	14	12	17
وحدة2	12	9	20	13
وحدة3	11	15	16	14

جدول6-30

الأموال الـــتي تعرضهـــا الوحـــدات الثـــلاث هـــي علـــى التـــوالي: 40، 50 70 مليار دينــــار، أمـــا إحتياجـــات تمويـــل المشـــاريع فتقـــدر لكـــل مشـــروع علـــى التـــوالي: 20، 60، 60، 20 مليـــار دينـــــار. تكـــون هذه المسألة في شـــكل مســألة نقــل إذا مـــاطلب إيجـــاد خطـــة تمويـــل هذه المشـــاريع بحيـــث يحصـــل البنـــك علـــى أعلـــى ربـــح ممكـــن. أو الخطة التي تتمول بهـــا هـــذه المشـــاريع مـــن هـــذه الوحـــدات بحيـــث تتحمل المشاريع مجتمعة أقل تكلفـــة ممكنـــة مـــن جـــراء الإقـــتراض مـــن الوحدات البنكيـــة.

كما يمكن إستخدام مسائل النقل أيضا في تنفيذ المشاريع بأقل تكلفــــة، أو في تخطيط الشراء أو التموين بالمواد للمصانع، و غير ذلك من المواضيع.

تمارين

تمرين1: يقـــوم الديـــوان الوطـــني للتمـــور بتســـويق دجلـــة نـــور إنطلاقـــا مـــن ثلاثـــة مـــوانيء رئيسيـــة الى ثـــلاث دول، حيـــث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانيء هي:

- ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 80 طن.
- ميناء وهران: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 40 طن.
- ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 60 طن.

أما كميات الطلب لكـــل دولـــة فـــهي:

- الولايات المتحدة الأمريكيـــة: حجـــم الطلـــب هـــو: 70 طـــن.
- كندا: حجم الطلـــب هـــو: 70 طـــن.
- أستراليا: حجم الطلـــب هـــو: 40 طـــن.

تكلفة نقـــل القنطـــار الواحـــد مـــن التمـــور بـــالدولار الأمريكـــي مـــن كل ميناء الى كل دولة مســـتوردة موضحـــة في الجـــدول التـــالي:

	و.م.أمريكية	كندا	أستراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

إذا كـــان الديـــوان هـــو الـــذي يتـــولى نقـــل المنتـــوج الى الـــدول المستوردة، و هدفه هو تصدير منتوجاتـــه بـــأقل تكلفـــة ممكنـــة.

المطلوب: 1- أكتـــب البرنـــامج الريـــاضي للمســـألة.

2- إذا خصص لكل كمية منقولة من كل ميناء الى كل دولة بـــاخرة واحدة، ما هو عدد البواخر المتوقع تصخيره لنقل هذه الكميات. وضح؟.

3- أوجـــد حـــل أساســـي أول بطريقـــة: أ- الزاويـــة الشـــمالية الغربيـــة. ب- التكلفـــة الدنيـــا. ج- بطريقـــة فوقـــل. وأحسب التكلفة الإجمالية عنـــد كـــل حـــل.

4- إنطلاقــا مــن جــدول الحــل الأساســي الأول المحصــل عليه من كــل طريقــة في الســؤال3 أوجــد الحــل الأمثــل بطريقــة: أ- التخطي. ب- التوزيع المعــدل. و أشــرح الحــل.

تمرين2: تريد مؤسسة توزيــع البضاعــة س نقــل هــذه البضاعــة مــن مخازنهــا الأربعــة الى مختلــف نقــاط التوزيــع الســتة بــأقل تكلفــة إجماليــة، إذا علمــت أن تكــاليف نقــل الوحــدة الواحــدة مــن كــل مخزن الى كل نقطة بالدينــــار هـــي :

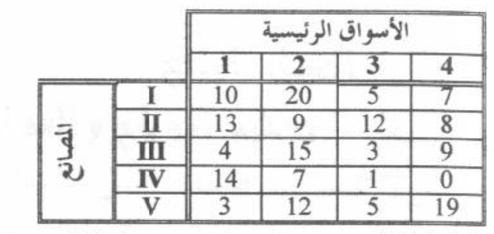
		نقاط التوزيع					
		1	2	3	4	5	6
المخازن	I	12	27	61	49	83	35
	II	23	39	78	28	65	42
	III	67	56	92	24	53	54
	IV	71	43	91	67	40	49

و أن الكميــات المعروضــة في كــل مخــزن بــآلاف الوحــدات هـــي علــى التــوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9. و الكميــات الممكــن إســتقبالها في كل نقطـــة توزيـــع بـــآلاف الوحـــدات هـــي علـــى التـــوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

المطلـــوب:

- إيجاد الحل الأساسي الأول بكـــل الطـــرق الـــتي تعرفـــها.
- إنطلاقا من الحلول الأساسية الأولى في المطلوب1 أوجد الحـــل الأمثـــل باتباع طريقة التخطي مرة، و طريقة التوزيع المعدل مرة أخرى.

تمرين3: إحدى الشـــركات الصناعيـــة لديـــها خمســـة مصـــانع، ويتـــم توزيع إنتاجها في أربعـــة أســـواق رئيســـية متبـــاعدة، علمـــا بـــأن كـــل المصانع تنتج منتوجـــات متماثلـــة. إذا علمـــت أن إنتـــاج كـــل مصنـــع بـــالوحدات هـــو علـــى التـــوالي: 100 ، 200 ، 300 ، 400 ، 500. وأن الكميـــات المطلوبـــة في الأســـواق الأربعـــة هـــي: 600 ، 500 ، 300 ، 100. و أن تكـــاليف نقـــل الوحـــدة الواحـــدة مـــن كـــل مصنـــع الى كل سوق هـــي:



		الأسواق الرئيسية			
		1	2	3	4
المصانع	I	10	20	5	7
	II	13	9	12	8
	III	4	15	3	9
	IV	14	7	1	0
	V	3	12	5	19

المطلوب: أوجد الحلول المثلـــى بإنتـــهاج جميـــع الطـــرق.

تمرين4: إليك شـــبكة النقـــل التـــالية:

	1	2	3	4	العرض
I	10	0	20	11	15
II	12	7	9	20	25
III	0	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	

المطلوب: أوجد الحلول المثلى بإنتهاج جميع الطرق.

تمرين5: أوجد الحلول المثلى بإنتهاج جميع الطرقلبيانات جدول النقل التالي:

	1	2	3	4	العرض
I	10	20	30	40	100
II	11	12	13	14	120
III	15	25	45	50	140
الطلب	70	130	50	50	

الفصل السابع

مسائل النقل - تعظيم الأرباح والعوائد-

إستخدامات مسائل النقل لا تقتصر فقط على حالة التدنئة كما تم التطرق الى ذلك في الفصل السابق، و إنما تتعدى ذلك الى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط المعروضة في حالة التدنئة مع بعض الإختلاف، حيث أن دالة الهدف تكون في حالة تعظيم، كما يتم إستبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة أو العائد.

أولا: صيغة البرنامج الخطي للمسألة: إذا إفترضنا أن الربح أو العائد المحصل عليه من جراء نقل وحدة واحدة من المنبع i الى المصب j هو p_{ij}، و الكميات المنقولة من كل منبع الى كل مصب هي x_{ij} و a_i هي كميات العرض لكل منبع و b_j هي كميات الطلب لكل مصب، فإن البرنامج الخطي الرياضي لمسألة النقل يكتب كما يلي:

$$\text{Max} : Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0 \\ P_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

حيث : $j=1,2,3.....n$ $i=1,2,3.....m$ و n : عدد المصبات. m هو عدد المنابع.

ثانيا: حل المسألة: إن حل مسائل النقل في حالة التعظيم لاتختلف كثيرا عن الحل في حالة التدنئة كما تم عرضه في الفصل السابق، إذ يتم إيجاد الحل الأساسي الأول تحت نفس الشروط، إما بطريقة:

- الزاوية الشمالية الغربية، أو،
- طريقة أعلى عائد و هي المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة ،

ثم يتم إختبار الحل إما **بطريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل** كما تم شرحهما في الحالة الأولى، غير أن الإختلاف يكمن في إختيار الخلايا التي تدخل الحل إذ على عكس حالة التدنئة، فإن **الخلية المرشحة للدخول الى الحل هي التي تعطي أكبر عائد حدي موجب** (مقابل أقل تكلفة في الإتجاه السالب في حالة التدنئة)، و قياسا على **ذلك نحصل على الحل الأمثل لما تعطي جميع الخلايا غير الداخلة في الحل عوائد حدية سالبة.**

و تجدر الإشارة هنا أيضا أن الخلايا الداخلة في الحل في أي جدول على طول سيرورة الحل يجب أن يساوي $m+n-1$.

مثال7-1: المؤسسة الوطنية للصناعات الإلكترونية لها ثلاث وحدات لإنتاج التلفزيونات الملونة من نفس الطراز هي:

- وحدة البليدة، - وحدة سيدي بلعباس - وحدة تيزي وزو

هذه الوحدات مكلفة بتموين مخازنها الرئيسية المتواجدة في كل من:

- الجزائر، - وهران - قسنطينة

التي تمون بدورها السوق الوطنية. الكميات التي تكون الوحدات قادرة على إنتاجها و تسويقها و كذا الكميات التي تطلبها المخازن الرئيسية أسبوعيا والربح المحصل عليه من كل جهاز مرسل من كل وحدة الى كل مخزن (بآلاف الدينارات)، معروض في الجدول التالي:

العرض(بالجهاز)	مخزن وهران	مخزن قسنطينة	مخزن الجزائر	
200	1	3	9	وحدة البليدة
150	0.5	3	6	وحدة ت.وزو
250	8	0.5	4	وحدة س.بلعباس
600	100	220	280	الطلب(بالجهاز)

الجدول 7-1

المطلوب: أوجد شبكة النقل التي يجب على المؤسسة تبنيها والتي تسمح لها بالحصول على أعلى ربح ممكن بإستخدام طريقة أعلى ربح.

نلاحظ أن **مجموع العرض= مجموع الطلب**، و بالتالي يمكن إيجاد الحل الأساسي الأول **بطريقة أعلى ربح** (مقابل أدنى تكاليف في حالة التدنئة)، بالمنطق التالي:

- أعلى ربح في الجدول هو9 آلاف دج، خلية (1،1)، العرض 200 و الطلب 280، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 200، يستنفذ العرض، و يبقى طلب قيمته 80.
- الربح الموالي من حيث الكبر هو 8 آلاف دج، خلية (3،3)، العرض 250 والطلب 100، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 100، يلبى كل الطلب، يبقى عرض قيمته 150جهاز.
- الربح الموالي من حيث الكبر هو 6 آلاف دج، خلية (2،1)، العرض 150 والطلب المتبقي من قبل هو 80، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 80، يلبى كل الطلب، يبقى عرض قيمته 70جهاز.
- الربح الموالي من حيث الكبر هو 4 آلاف دج، خلية (3،1)، العرض 150غير أن الطلب مستوفى كلية، نتجاوز الخلية.
- الربح الموالي من حيث الكبر هو 3 آلاف دج، خلية (1،2)، العرض مستنفذ، نتجاوز الخلية.

– الربح الموالي من حيث الكبر هو أيضا 3 آلاف دج، خلية (2،2)، العرض المتبقى 70 و الطلب 220، أكبر قيمة يمكن توجيهها هي 70، يستنفذ العرض، يبقى طلب مقداره 150.

– الربح الموالي من حيث الكبر هو 1 ألف دج، خلية (3،1)، العرض مستوفى.

– الربح الموالي من حيث الكبر هو 0.5 ألف دج، خلية (3،2)، العرض مستوفى.

	مخزن الجزائر	مخزن قسنطينة	مخزن وهران	العرض
وحدة البليدة	9 **200**	3	1	**200**
وحدة ت.وزو	6 **80**	3 **70**	0.5	**150**
وحدة بلعباس	4	0.5 **150**	8 **100**	**250**
	280	**220**	**100**	**600**

الجدول 7-2.

– الربح الموالي من حيث الكبر هو 0.5 ألف دج، خلية (3،2)، العرض 150 والطلب 150، يتم إستيفاء الطلب و إنفاذ العرض، و تكون كل الكميات المعروضة قد وزعت وكل الكميات المطلوبة قد لبيت، و نحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول الملخص في الجدول 7-3.

حيث أن الربح المحصل عليه هو:

$$P0=200\times9+80\times6+70\times3+150\times0.5+100\times8=\mathbf{3365}$$

أي الربح المحصل عليه عند إستخدام هذه الشبكة هو **3365 ألف دينار.**

	مصب1	مصب2	مصب3	a_i
منبع1	9 **200**	3	1	200
منبع2	6 **80** (-)	3 **70** (+)	0.5	150
منبع3	4 (+)	0.5 **150** (-)	8 **100**	250
b_j	280	220	100	600

جدول7-3

و يبقى الآن إختبار الحل إذا كان أمثلا أم لا، و هذا بإختبار عوائد الوحدة الواحدة لكل خلية غير داخلة في الحل بأسلوب النخطي أو أسلوب التوزيع المعدل، و نختار هنا الأسلوب الأول، فيكون:

$\sigma_{12}=3-9+6-3= -3$

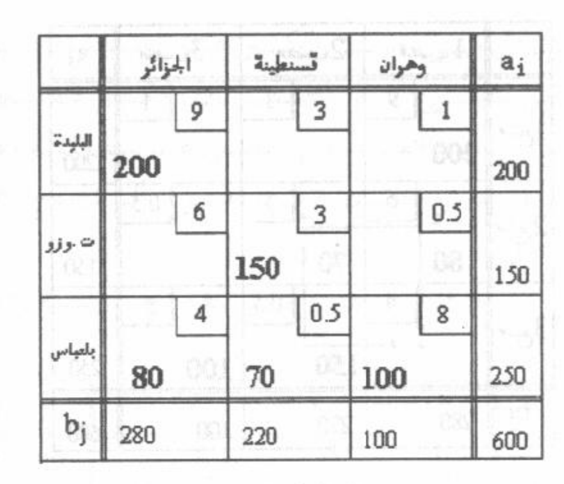
$\sigma_{13}=1-8+0.5-3+6-9= -12.5$

$\sigma_{23}=0.5-3+0.5-8= -10$

$\sigma_{31}=4-6+3-0.5=0.5$

يلاحظ أن الخلية (3،1) تزيد الربح بمقدار 0.5 لكل تلفاز منقول عبرها ، فإذا أمررنا عبرها، أي من المنبع3 الى المصب1 مثلا 20 تلفازا فإن الربح الكلي سوف يزداد بمقدار 0.5 ×20= 10 ألاف دينار.

كما جرى تحسين الحل في حالة التدنئة، نقوم أيضا هنا بنفس الشيء، إذ أن أكبر كمية يمكن إمرارها عبر الخلية المشار إليها هي 80 جهاز، و بإجراء التحويلات نحصل على الجدول 7-4.



	الجزائر	قسنطينة	وهران	a_i
البليدة	9 / **200**	3	1	200
ت.وزو	6	3 / **150**	0.5	150
بلعباس	4 / **80**	0.5 / **70**	8 / **100**	250
b_j	280	220	100	600

الجدول 7-4.

و فيه يجب أن يكون الربح الجديد يزيد عن سابقه بـــ 40 ألف دينار.

$$P1=200\times9+150\times3+80\times4+70\times0.5+100\times8=3405.$$

و يلاحظ بالفعل أن الربح الجديد إرتفع بمقدار 40 ألف دينار.

نعود من جديد فنحسب الربح الحدي للخلايا الفارغة:

$$\sigma_{12}=3-9+4-0.5= -2.5$$

$$\sigma_{13}=1-8+4-9= -12$$

$$\sigma_{21}=6-3+0.5-4= -0.5$$

$$\sigma_{23}=0.5-8+0.5-3= -10$$

كل الأرباح الحدية صارت سالبة و بالتالي فإنه لاتوجد أية خلية أخرى يمكن عن طريقها تحسين الحل بزيادة الأرباح، و نكون بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل، والذي نفسره في ما يلي:

أ- وحدة البليدة : تمون مخزن الجزائر بـــ 200 تلفازأسبوعيا وتحصل على ربح قيمته 1800. 10^3 دج.

ب- وحدة ت.وزو: تمون مخزن قسنطينة بـــ 150 تلفاز أسبوعيا، تحصل على ربح قيمته 450 . 10^3 دج.

ج- وحدة بلعباس: تمون :

- الجزائر بـــ 80 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 320 . 10^3 دج.
- قسنطينة بـــ 70 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 35 . 10^3 دج.
- وهران بـــ 100 تلفاز و تحصل على ربح قيمته 800 . 10^3 دج.

و تحصل بذلك مؤسسة الصناعات الإلكترونية ربحا كليا قيمته: 3405 . 10^3 دج.

و هي خطة وحيدة إذ لا يمكن إيجاد خطة أخرى تؤدي الى نفس التكلفة لأنه لا توجد أية تكلفة حدية معدومة ضمن التكاليف الحدية لآخر جدول.

ثالثا: حالات خاصة: من الحالات الممكن مصادفتها:

1- عدم تساوي العرض مع الطلب: في حالة التعظيم أيضا يمكن أن نقع في حالة عدم تساوي العرض مع الطلب و هو واقع المسائل الإقتصادية، و كما جرى العمل في الفصل السابق فإنه يتم أيضا إضافة الى الجدول الأساسي إمّا سطر خيالي بأرباح صفرية أوعمود خيالي بأرباح صفرية، قيمتيهما هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، و يتم إيجاد الحل بشكل عادي جدا على أن نهمل السطر أو العمود المضاف عند الوصول الى جدول الحل الأمثل.

2- حالة التفكك: كما تم شرحها في الفصل السابق هي الحالة التي لا يساوي فيها عدد الخلايا الداخلة في الحل القيمة m+n-1 ، و حينئذ ينبغي أيضا التخلص من هذا المشكل بغية إيجاد كل المسارات للخلايا غير الداخلة في الحل، و هذا بإدخال قيمة صغيرة بجوار الصفر هي ε في أحد الخلايا أو بعض الخلايا المقابلة للسطر و العمود المشبعين في نفس الوقت، إذ ينبغي إشباع إمّا السطر أو العمود و الإبقاء في أحدهما القيمة ε لتدخل الى إحدى الخلايا المقابلة في مرحلة أخرى و يتم التعامل معها و كأنها قيمة حقيقية، كما جرى ذلك في الفصل السابق (أنظر المثال6-6).

تمارين

تمرين1: شركة نقل أوكلت لها مهمة نقل الحبوب المستوردة من أربعة موانيء الى أربعة مطاحن رئيسية داخل البلاد، حيث أن الكميات المخزنة المطلوب نقلها من الموانيء هي :

- ميناء عنابة: الكميات المطلوب نقلها منه هي: 35 آلاف قنطار.
- ميناء جيجل: الكميات المطلوب نقلها منه هي 20 ألف قنطار.
- ميناء مستغانم: الكميات المطلوبة نقلها منه هي 25 ألف قنطار.
- ميناء الغزوات: الكميات المطلوب نقلهت منه هي 15 ألف قنطار.

بينما قدرة إستقبال المطاحن هي:

- مطاحن مهدية: طاقة إستقبالها هي 35 ألف قنطار.
- مطاحن مستغانم طاقة إستقبالها 15 ألف قنطار.
- مطاحن قورصو: طاقة إستقبالها 25 ألف قنطار.
- مطاحن سطيف: طاقة إستقبالها 20 ألف قنطار.

إذا كانت الأرباح المجنية من طرف شركة النقل من وراء نقل كل قنطار من كل ميناء الى كل مطحنة بالدينار هي :

	مهدية	مستغانم	قورصو	سطيف
ميناء عنابة	35	45	50	100
ميناء جيجل	35	40	55	70
ميناء مستغانم	100	120	60	25
ميناء الغزوات	45	60	35	10

المطلوب: إذا كان هدف الشركة هو إيجاد أفضل خطة للنقل و التي تجعلها تجني أكبر ربح ممكن:

1- أوجد الحل الأساسي الأول مرة بطريقة أعلى ربح و مرة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- أوجد أمثل خطة للنقل و حدد الأرباح الكلية التي تجنيها المؤسسة، مرة بإستعمال طريقة التخطيي و مرة بإستعمال طريقة التوزيع المعدل.

تمرين2: إقترح أفضل خطة تسمح بنقل البضاعة س من المخازن الأربعة الى مختلف نقاط التوزيع الستة بأعلى عائد ممكن، إذا علمت أن عائد الوحدة الواحدة المنقولة من كل مخزن الى كل نقطة بالدينار هي :

	1	2	3	4	5	6
I	12	27	61	49	83	35
II	23	39	78	28	65	42
III	67	56	92	24	53	54
IV	71	43	91	67	40	49

و أن الكميات المعروضة في كل مخزن بآلاف الوحدات هي على التوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9. و الكميات الممكن إستقبالها في كل نقطة توزيع بآلاف الوحدات هي على التوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

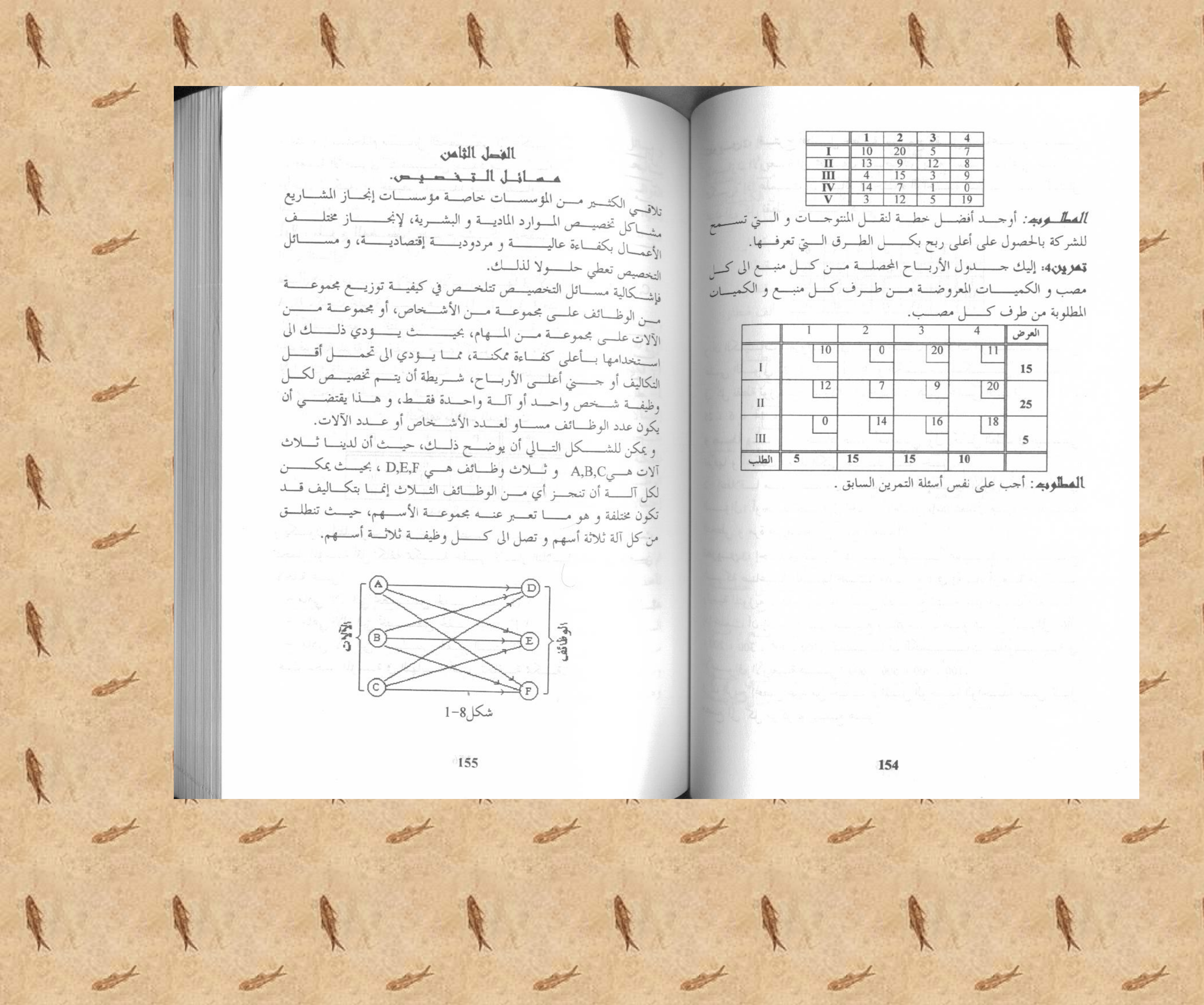
وهذا بـ : 1- إيجاد حل أساسي أول بكل الطرق التي تعرفها و أحسب العائد الكلي عند كل حل.

2- إنطلاقا من جداول الحلول الأساسية الأولى المطلوبة في السؤال1 أوجد جداول الحل الأمثل بإستعمال مرة طريقة التخطي و مرة طريقة التوزيع المعدل.

تمرين3: إحدى شركات النقل أمضت عقد لنقل منتوج شركة صناعية لديها خمسة مصانع ، في إتجاه أربعة مراكز رئيسية للتوزيع ، علما بأن كل المصانع تنتج منتوجات متماثلة.

إذا علمت أن إنتاج كل مصنع بالوحدات هو على التوالي: 100 ، 200 ، 300 ، 400 ، 500. كما أن الكميات المطلوبة في الأسواق الأربعة هي: 600 ، 500 ، 300 ، 100.

و أن الربح المحصل عليه من جراء نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع الى كل مركز توزيع هو:



	1	2	3	4
I	10	20	5	7
II	13	9	12	8
III	4	15	3	9
IV	14	7	1	0
V	3	12	5	19

المطلوب: أوجد أفضل خطة لنقل المنتوجات و التي تسمح للشركة بالحصول على أعلى ربح بكل الطرق التي تعرفها.

تمرين4: إليك جدول الأرباح المحصلة من كل منبع الى كل مصب و الكميات المعروضة من طرف كل منبع و الكميات المطلوبة من طرف كل مصب.

	1	2	3	4	العرض
I	10	0	20	11	**15**
II	12	7	9	20	**25**
III	0	14	16	18	**5**
الطلب	**5**	**15**	**15**	**10**	

المطلوب: أجب على نفس أسئلة التمرين السابق .

الفصل الثامن

مسائل التخصيص.

تلاقي الكثير من المؤسسات خاصة مؤسسات إنجاز المشاريع مشاكل تخصيص الموارد المادية و البشرية، لإنجاز مختلف الأعمال بكفاءة عالية و مردودية إقتصادية، و مسائل التخصيص تعطي حلولا لذلك.

فإشكالية مسائل التخصيص تتلخص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص، أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك الى استخدامها بأعلى كفاءة ممكنة، مما يؤدي الى تحمل أقل التكاليف أو جني أعلى الأرباح، شريطة أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة فقط، و هذا يقتضي أن يكون عدد الوظائف مساو لعدد الأشخاص أو عدد الآلات.

و يمكن للشكل التالي أن يوضح ذلك، حيث أن لدينا ثلاث آلات هيA,B,C و ثلاث وظائف هي D,E,F ، بحيث يمكن لكل آلة أن تنجز أي من الوظائف الثلاث إنما بتكاليف قد تكون مختلفة و هو ما تعبر عنه مجموعة الأسهم، حيث تنطلق من كل آلة ثلاثة أسهم و تصل الى كل وظيفة ثلاثة أسهم.

شكل8-1

و يمتد إستخدام مسائل التخصيص الى الكثير من المسائل الواقعية الأخرى كتخصيص عدد من الحافلات لعدد من الأحياء السكنية، أو تخصيص عدد من المقاولين لإنجاز عدد من المشاريع...الخ.

أولا : طرح المشكل: يطرح مشكل التخصيص على وجه المثال التالي:

مثال8-1: مؤسسة لإنجاز الآبار لديها 3 آلات للحفر هي C, B, A ،كلفت بحفر 3 آبار هي: F, E, D في 3 مناطق مختلفة.

إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة و حسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، و قد بينتها الدراسة الأولية التي قامت بها مصلحة المحاسبة التحليلية بالمؤسسة كما هي موضحة في الجدول التالي:

التكلفة بآلاف الدينارات

الوظائف / الآلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول8-1

و يكون **المطلوب** هو إيجاد أفضل تخصيص للآلات بحيث تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة لحفر الآبار الثلاثة، بمعنى ينبغي الإجابة عن:

- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر D ؟
- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر E ؟
- ماهي الآلة التي تخصص لحفر البئر F؟

بحيث تتحمل المؤسسة في النهاية أقل تكلفة ممكنة.

و مسائل **التخصيص لا تهتم فقط بتدنئة التكاليف، إنما أيضا بالبحث عن أفضل تخصيص من شأنه تعظيم الأرباح أو العوائد.**

ثانيا: طرق حل مسائل التخصيص: هناك عدة طرق لحل مثل هذه المسائل، سوف نتطرق لثلاث منها و هي:

- طريقة الحصر الإحتمالي (تسمى أيضا طريقة العد الكامل).
- الطريقة الهنغارية.
- طريقة النقل.

و تستخدم هذه الطرق سواء في **تخفيض تكاليف التخصيص أوفي تعظيم الأرباح أو العوائد إنما بمنطقين متعاكسين.**

1- **تخفيض التكاليف**: يتم إيجاد الحل بإحدى الطرق التالية:

أ- **طريقة الحصر الإحتمالي**: في هذه الطريقة نحدد كل إحتمالات التخصيص الممكنة بحيث يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة، و يكون عدد التخصيصات الممكنة مساو الى مضروب عدد الوظائف، فإذا فرضنا أن عدد الوظائف هو N و هو بنفس حجم عدد الآلات فإن عدد إحتمالات التخصيصات الممكنة هو !N حيث :

$$N!=N(N-1).(N-2).(N-3)....(N-(N-1))$$

ثم نحدد هذه التخصيصات و نحسب تكاليف كل توزيع ثم نأخذ التخصيص الذي يكلف أقل ما يمكن.

مثال8-2: أوجد حل مسألة التخصيص الواردة في المثال السابق 8-1 بطريقة الحصر الإحتمالي.

من المسألة نجد أن عدد الوظائف يتساوى مع عدد الآلات ويساوي 3، لذلك فإن الإحتمالات الممكنة هي: 3×2×1= 6.

وهذه الإحتمالات هي:

1- (A,D), (B,E), (C,F).
2- (A,D), (B,F), (C,E).
3- (B,D), (A,E), (C,F).
4- (B,D), (A,F), (C,E).
5- (C,D), (A,E), (B,F).
6- (C,D), (A,F), (B,E).

أي أن الإحتمال الأول مثلا هو أن نخصص الآلة A للوظيفة D، و نخصص الآلة B للوظيفة E و الآلة C للوظيفة F.

و على نفس المنوال تفسر بقية الإحتمالات.

لاحظ أننا تفادينا إعطاء أكثر من وظيفة لكل آلة.

بعد تحديد الإحتمالات الممكنة نقوم بحساب تكلفة كل إحتمال يمكن إختياره و ذلك كما يلي:

رقم الإحتمال	الإختيارات	تكاليف كل إختيار/ 10^3 دج
1	(A,D), (B,E), (C,F).	18+14+10=42
2	(A,D), (B,F), (C,E).	18+10+8=36
3	(B,D), (A,E), (C,F).	12+6+10=28
4	(B,D), (A,F), (C,E).	12+14+8=34
5	(C,D), (A,E), (B,F).	16+6+10=32
6	(C,D), (A,F), (B,E).	16+14+14=44

جدول8-2

من تكاليف الاختيارات نأخذ أقل تكلفة و يكون الاختيار الأمثل هو الاختيار المقابل لتلك التكلفة، و في مثالنا أقل تكلفة هي 28 ألف دينار و بالتالي فإن الاختيار الثالث هو الأحسن وبذلك يكون التخصيص على النحو التالي:

- الآلة B تنجز البئر D بتكلفة تقدر بـ:12000دج.
- الآلة A تنجز البئر E بتكلفة تقدر بـ:6000 دج.
- الآلة C تنجز البئر F بتكلفة تقدر بـ: 10000دج.

و كما هو واضح في العمود الثالث من جدول الإختيارات السابق، فإن التكلفة الإجمالية الدنيا التي تتحملها المؤسسة عبارة عن مجموع تكاليف كل تخصيص، أي:

$$Z=12000+6000+10000=\mathbf{28000}$$

و يكون هذا هو أحسن تخصيص ممكن.

ب- **الطريقة الهنغارية:** سميت بهذه الطريقة نسبة الى الرياضي المجري د. كوهن KUHN ، و لإيجاد أفضل تخصيص بهذه الطريقة يتم إتباع المنهجية التالية:

بعد تعيين مصفوفة التكاليف و وضعها في جدول نتبع خطوات المراحل التالية:

المرحلة الأولى: ايجاد الأصفار: حيث نوجد ما يسمى **بمصفوفة تكلفة الفرصة** و ذلك كما يلي:

- نأخذ أقل تكلفة في كل صف ونطرحها من تكاليف ذلك الصف، فيتحول الرقم المقابل لأقل تكلفة الى الصفر، ونحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى **بمصفوفة المراجعة الأولية**.
- من الجدول الجديد نأخذ أقل رقم من كل عمود ونطرحه من أرقام ذلك العمود، فيتحول الرقم المقابل لأقل رقم في العمود الى الصفر، و نحصل على جدول جديد، مصفوفته تسمى **بمصفوفة تكلفة الفرصة الكلية**.

المرحلة الثانية: البحث عن حل أمثل: من الجدول المحصل عليه من المرحلة السابقة نبحث عن حل بحيث تكون فيه التكاليف الكلية معدومة، حيث نقوم بتأطير الأعمدة و الصفوف التي تحتوي على أصفار بأقل عدد ممكن من الإطارات الأفقية أو العمودية أو هي معا، **فإذا كان** عدد الإطارات المحصل عليها سواء **الأفقية أو العمودية مساويا** لعدد

الصفوف أو الأعمدة، فإننا نكون قد تحصلنا على الحل الأمثل، و عليه نقوم بعملية التخصيص و ذلك بأن نأخذ الأصفار التي تقع على إطارات الصفوف و الأعمدة لأن هذه الأصفار تمثل أقل التكاليف، حيث نقوم بعملية التخصيص على أساسها بإعطاء وظيفة واحدة لكل آلة أو وظيفة واحدة لكل شخص. إذا كان هذا ممكنا نكون قد توصلنا الى الحل الأمثل وإلا ننتقل الى المرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة: إذا كان عدد الأطر التي تغطي الأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فإنه لا يمكن القيام بكل التخصيصات، و لأجل ذلك نقوم بإختيار أقل قيمة من القيم غير المؤطرة و نطرحها من كل القيم غير المؤطرة و نضيفها الى نقاط التقاطع للأطر. (لاحظ أن مكان هذه القيمة يصبح صفرا).

المرحلة الرابعة: نعود الى المرحلة الثانية و هذا حتى يصبح عدد الإطارات المحصل عليها مساويا لعدد الوظائف و حينها نقوم بعملية التخصيص.

ملاحظة: يمكن أن نحصل على عدد من الحلول بنفس التكاليف الدنيا.

مثال8-3: قم بتخصيص الآلات C, B, A للقيام بالوظائف 1، 2، 3 إذا علمت أن تكاليف قيام كل آلة بكل وظيفة محددة في الجدول التالي:

تكاليف التخصيص بآلاف الدينارات

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	13	7	14
B	9	7	7
C	5	10	12

جدول8-3

نقوم باتباع الخوارزمية خطوة خطوة و على الوجه التالي:

- أقل قيمة في الصف الأول هي:7
- أقل قيمة في الصف الثاني هي:7
- أقل قيمة في الصف الثالث هي:5

بطرح كل قيمة من هذه القيم من الصف الذي تنتمي اليه نحصل على الجدول التالي:

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول8-4

من الجدول الجديد:

- أقل قيمة في العمود الأول هي:0
- أقل قيمة في العمود الثاني هي:0
- أقل قيمة في العمود الثالث هي:0

وعليه لا يحدث أي تغيير على مستوى الأعمدة.

و يمكن تأطير الأصفار كما يلي:

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	6	0	7
B	2	0	0
C	0	5	7

جدول8-5

بما أن أقل عدد من الإطارات المحصل عليها يساوي 3 و يساوي عدد الآلات و عدد الوظائف، لذلك فإن هذا الجدول هو الجدول الذي يمكن التخصيص على أساسه، بإعطاء آلة واحدة لكل وظيفة، و عليه فإن التخصيص الأمثل يكون كما يلي:



- **في الصف الأول** هناك صفر وحيد (A,2)، و عليه نخصص الآلة A للوظيفة2 بتكلفة 7. و نشطب كل أصفار العمود الثاني، فلا يمكن تخصيص الآلة B للوظيفة 2 ، لأن هذه الوظيفة خصصت لها الآلة A.
- **في الصف الثاني** هناك صفر واحد غير مشطب (B,3) على أساسه نخصص الآلة B للوظيفة3 و بتكلفة 7.
- **في الصف الثالث** هناك صفر واحد (C,1) على أساسه نخصص الآلة C للوظيفة الأولى و بتكلفة 5.

و نكون بذلك قد خصصنا لكل وظيفة آلة واحدة فقط، و عليه تتحمل المؤسسة أقل تكلفة أي :

$$Z=7000+7000+5000=19000$$

أي أن أقل تكلفة للتخصيص هي 19000 دينار.

مثال8-4: بالطريقة الهنغارية أوجد حل للمثال8-1

جدول تكاليف التخصيص للمثال المشار اليه هو:

جدول التكاليف بآلاف الدينارات

وظائف / آلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول8-6

يتم اتباع الخوارزمية على النحو التالي:
- أقل قيمة في الصف الأول هي:6
- أقل قيمة في الصف الثاني هي:10
- أقل قيمة في الصف الثالث هي:8

بطرح كل قيمة من هذه القيم من الصف الذي تنتمي اليه نحصل على الجدول التالي:

	D	E	F
A	12	0	8
B	2	4	0
C	8	0	2

جدول8-7

من الجدول الجديد:
- أقل قيمة في العمود الأول هي:2
- أقل قيمة في العمود الثاني هي:0
- أقل قيمة في العمود الثالث هي:0

و عليه فإن الجدول الثاني هو:

	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول8-8

و عليه يمكن تأطير الأصفار كما يلي:

وظائف / آلات	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

جدول8-9

بما أن أقل عدد من الإطارات المحصل عليها يساوي 2 و هو لا يساوي عدد الآلات و عدد الوظائف، لذلك فإن هذا الجدول لا يتيح إمكانية التخصيص.

لذلك نختار أقل رقم من بين الأرقام خارج الأطارين و هو 2 ونطرحه من كل الأرقام خارج هذين الإطارين و نضيفه الى الرقم الذي يتقاطعا عنده و هو 4، وبذلك نحصل على الجدول الجديد التالي:

	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول8-10

و عليه فإن التأطير الجديد هو:

وظائف / آلات	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

جدول8-11

و يلاحظ أن عددَ الإطارات أصبحت مساوية لعدد الآلات وعدد الوظائف لذلك فإن هذا الجدول يتيح إمكانية التخصيص الأمثلي، و منه نعطي التخصيص التالي:

- **من الصف الأول** نأخذ (A,E) و نخصص الآلة A للوظيفة E بتكلفة تقدر بـ 6000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود).- **من الصف الثاني** نأخذ (B,D) ونخصص الآلة B للوظيفة D بتكلفة تقدر بـ 12000 دج (نشطب الأصفار الموجودة في نفس السطر أو العمود)، يلاحظ أنه لا يمكن أخذ (B,F) لأنه في هذه الحالة سوف لن نجد ما نخصصه للآلة C.
- **من الصف الثالث** نأخذ (C,F) و نخصص الآلة C للوظيفة F بتكلفة تقدر بـ 10000 دج.

و بذلك تكون أدنى تكلفة ممكنة لهذا التخصيص هي:

$$Z=6000+12000+10000=\mathbf{28000}$$

و هي نفس التكلفة الدنيا المحصل عليها باستعمال طريقة الحصر الاحتمالي.

ج- طريقة النقل: يمكن إستخدام طريقة مسائل النقل في إيجاد أحسن تخصيص، و ذلك ببناء جدول للنقل يحتوي على التكاليف و التي هي تكاليف التخصيص، غير أن كميات العرض و كميات الطلب لكل سطر و عمود يجب أن نضعها مساوية للواحد، و يكون بذلك مجموع العرض مساويا لمجموع الطلب و مساويا لعدد المهام، ثم نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا (مستحسن)، أو أية طريقة أخرى تماما كما تم العمل في مسائل النقل، غير أنه ينبغي في هذه الحالة الحرص على عدم الوقوع في حالة التفكك لكون الكثير من الأسطر و الأعمدة تتشبع في نفس الوقت، و في هذه الحالة نحرص على تشبيع إما السطر أو العمود، و نبقي قيمة صغيرة ε لنتعامل معها و كأنها عدد و نهملها عند الوصول الى الحل الأمثل.

مثال8-5: بطريقة النقل - التكلفة الدنيا- أوجد حل لبرنامج التخصيص الوارد في المثال8-1.

جدول تكاليف التخصيص المشار اليه هو:

	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

جدول8-12

لإيجاد الحل بطريقة مسائل النقل نقوم بتشكيل جدول النقل أولا، حيث نجعل كميات العرض و الطلب على مستوى كل سطر و عمود مساوية للواحد، و نضع التكاليف في الزوايا العلوية اليمنى لكل خلية، تماما كما فعلنا في مسائل النقل، وبذلك نحصل على جدول النقل التالي:

	D	E	F	a_i
A	18	6	14	1
B	12	14	10	1
C	16	8	10	1
b_j	1	1	1	3

جدول8-13

بعد تكوين جدول النقل نقوم بإيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا فنحصل على الجدول التالي:

	D	E	F	ai
A	18 ⓔ ε	6 ①	14 /	1
B	12 ε_1	14 /	10 ①	1
C	16 $1-\varepsilon_1$	8 /	10 /	1
b_j	1	1	1	3

جدول8-14

يظهر في الجدول أعلاه الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا ، و يلاحظ أنه حرصنا على عدم تفكك الحل أي ضرورة تحقق شرط m+n-1 من الخلايا الداخلة في الحل و لأجل ذلك تمت الاستعانة بـ ε تماما كما تم شرح ذلك في الفصل الخاص بمسائل النقل- حالة التفكك.

و يتم بعد هذا إختبار الحل إذا كان أمثلا أم لازال قابلا للتحسين إما بأسلوب التخطي أو أسلوب التوزيع المعدل، و سنختار هنا الأسلوب الأول، حيث نجد التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل كما يلي:

$$\sigma_{AF}=14-10+12-18=-2$$
$$\sigma_{BE}=14-12+18-6=14$$
$$\sigma_{CE}=8-6+18-16=4$$
$$\sigma_{CF}=10-10+12-16=-4$$

بما أن ليس كل التكاليف الحدية غير سالبة لذلك فإن هذا الحل هو حل غير أمثل، و الخلية التي تدخل الى الحل هي CF لأن $\sigma_{CF}=-4$ أي أن إدخال هذه الخلية للحل سوف يؤدي الى إنخفاض التكاليف الكلية بمقدار 4 وحدات نقدية لكل وحدة كمية، و عليه فبإجراء التحويلات على مسار هذه الخلية نحصل على جدول الحل الثاني و هو:

	D	E	F	ai
A	18 ε	6 ①	14	1
B	12 ①	14	10 ε_1	1
C	16	8	10 $1-\varepsilon_1$	1
bj	1	1	1	3

جدول8-15

لإختبار هذا الحل نبحث عن التكاليف الحدية فنجد:

$\sigma_{AF}=14-10+12-18=-2$
$\sigma_{BE}=14-12+18-6=14$
$\sigma_{CD}=16-12+10-10=4$
$\sigma_{CE}=8-10+10-12+18-6=8$

نلاحظ أن الحل لازال قابلا للتحسين، حيث يتطلب إدخال الخلية AF للحل لتنخفض التكاليف بـ2 وحدة نقدية لكل وحدة كمية، حيث تصبح كل التكاليف الحدية موجبة؛ ويكون الحل حلا أمثلا، بحذف الأحرف المساعدة نحصل على جدول الحل الأمثل للتخصيص بطريقة مسائل النقل و هو على النحو التالي:

	D	E	F
A	18	6 ①	14
B	12 ①	14	10
C	16	8	10 ①

جدول8-16

و يعني هذا أن أمثل تخصيص هو التالي:

- الآلة A تخصص للعمل E بتكلفة 6000 دج.
- الآلة B تخصص للعمل D بتكلفة 12000 دج.
- الآلة C تخصص للعمل F بتكلفة 10000دج.

و هذا بتكلفة تخصيص إجمالية دنيا تقدر بـ: 28000دج، وهي نفس التكلفة المحصل عليها باستعمال الطريقتين الأخريتين.

2- تعظيم الأرباح أو العوائد: في حالة تعظيم أرباح التخصيص يتم أيضا إتباع نفس الطرق المشار اليها في حالة التدنئة، إنما بنظرة معاكسة.

أ- التعظيم بطريقة الحصر الاحتمالي: في هذه الحالة يتم إيجاد اختيارات التخصيص الممكنة ثم حساب أرباح أو عوائد كل تخصيص و أخذ التخصيص الذي يعطي أعلى ربح أوعائد، و كما تم توضيح ذلك في حالة التدنئة فإن الإحتمالات الممكنة عبارة عن مضروب N.

مثال8-6 : مؤسسة للنقل المدني تملك ثلاث حافلات مختلفة الحمولة، تريد تخصيصها لنقل ركاب ثلاث أحياء متباعدة، الدراسة الأولية بينت لها أنه وفقا للتعريفة الجاري العمل بها ووفقا لحجم حركة الركاب، فإن الأرباح التي يمكن جنيها من جراء تخصيص كل حافلة لكل حي موضحة في الجدول التالي:

الأرباح بآلاف الدينارات شهريا

أحياء / حافلات	D	E	F
A	72	24	56
B	48	56	40
C	64	32	40

جدول8-17

المطلوب: أوجد التخصيص الذي يسمح للمؤسسة بالحصول على أعلى الأرباح بطريقة الحصر الإحتمالي.

يلاحظ أن عدد الحافلات هو 3، و منه فإن الإحتمالات الممكنة هي:

$$6=1\times2\times3$$

ومنه فإن الجدول التالي يظهر الاختيارات الممكنة و أرباح كل اختيار:

تكاليف كل إختيار	الإختيارات	رقم الإحتمال
72+56+40=168	(A,D), (B,E), (C,F).	1
72+40+32=144	(A,D), (B,F), (C,E).	2
48+24+40=112	(B,D), (A,E), (C,F).	3
48+56+32=136	(B,D), (A,F), (C,E).	4
64+24+40=128	(C,D), (A,E), (B,F).	5
64+56+56=176	(C,D), (A,F), (B,E).	6

جدول8-18

من الجدول نلاحظ أن أعلى الأرباح هي التي يحققها الإحتمال السادس و بالتالي فإن أمثل تخصيص هو:

(C,D), (A,F), (B,E).

أي أن:

- الحافلة C تخصص لـلحي D بربح يقدر بـ: 64.000دينار شهريا.
-الحافلة A تخصص لـلحي F بربح يقدر بـ: 56.000 دينار شهريا.
-الحافلة B تخصص لـلحي Eبربح يقدر بـ: 56.000 دينار شهريا.
أي أن أعظم ربح يجنى من هذا التخصيص يقدر بـ:
176.000 دينار شهريا

ب- التعظيم بالطريقة الهنغارية: في هذه الطريقة لإيجاد التخصيص الذي يعطي أعظم الأرباح و العوائد فإنه يتم تقريبا اتباع نفس المنهجية المتبعة في حالة التدنئة، حيث يتم إيجاد أكبر رقم في مصفوفة الأرباح أو العوائد ثم يتم طرح قيم المصفوفة من القيمة التي تمثل أعلى ربح أو أعلى عائد، و نحصل بذلك على جدول جديد من خلاله نعود الى استخدام نفس الخطوات الموضحة في حالة التدنئة، و يتم ذلك كما في المثال التالي:

مثال 8-7: أوجد التخصيص الذي من شأنه أن يعطي أعظم الأرباح بالطريقة الهنغارية من جدول المثال السابق.
أكبر ربح في الجدول هو 72، نطرح كل عناصر الجدول من القيمة 72 فنحصل على الجدول التالي:

	D	E	F
A	0	48	16
B	24	16	32
C	8	40	32

جدول8-19

من الجدول الجديد المحصل عليه نتبع الآن نفس الخطوات المتبعة في حالة التدنئة و ذلك كما يلي:
نأخذ أدنى قيمة من كل صف ونطرحها من قيم كامل ذلك الصف:
- أدنى قيمة في الصف الأول هي 0.
- أدنى قيمة في الصف الثاني هي 16.
- أدنى قيمة في الصف الثالث هي8.

بالطرح نحصل على الجدول الجديد التالي:

	D	E	F
A	0	48	16
B	8	0	16
C	0	32	24

جدول8-20

نأخذ أدنى قيمة على مستوى كل عمود ونطرحها من كامل عناصر ذلك العمود:
- أدنى قيمة في العمود الأول هي 0.
- أدنى قيمة في العمود الثاني هي 0.
- أدنى قيمة في العمود الثالث هي 16.

و منه فإن الجدول الجديد هو:

وظائف / آلات	D	E	F
A	0	48	0
B	8	0	0
C	0	32	8

جدول8-21

من الجدول المحصل عليه، نؤطر الأصفار بأقل عدد ممكن من الأطر، و هو ما يظهر في الجدول أعلاه.

نلاحظ أن عدد الأطر الدنيا المحصل عليها متساو مع عدد الأسطر و الأعمدة و بالتالي فإن هذا الجدول يعطي التخصيص الأمثل و هو نفسه المحصل عليه بطريقة الحصر الإحتمالي، أي:

الحافلة C تخصص لحي D بربح يقدر بـ 64.000 دينار شهريا.
الحافلة A تخصص لحي F بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهريا.
الحافلة B تخصص لحي E بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهريا.
أي أن أعظم ربح يجنى من هذا التخصيص يقدر بـ:
176.000 دينار شهريا.

ج- التعظيم بطريقة النقل: يمكن إستخدام طريقة النقل أيضا في إيجاد أفضل تخصيص يعطي أعلى ربح أو عائد، كما تم التطرق الى ذلك في مسائل النقل، حيث يتم في هذه الحالة تكييف مسألة التخصيص في شكل مسألة للنقل، بجعل الطلب على مستوى كل سطر و على مستوى كل عمود مساويا للواحد، و يتم إيجاد الحل بطريقة أعلى الأرباح كما تم تناولها في مسائل النقل- تعظيم الأرباح.

مثال8-8: أوجد التخصيص الأمثل لبيانات المثال السابق بطريقة مسائل النقل.

نقوم بتكييف مسألة التخصيص في شكل مسألة نقل كما يلي:

	D	E	F	ai
A	72	24	56	1
B	48	56	40	1
C	64	32	40	1
bj	1	1	1	3

جدول8-22

نوجد الحل الأساسي الأول بطريقة **أعلى الأرباح** كما تم التطرق اليها في مسائل النقل، مع الحرص الشديد على عدم إظهار حالة التفكك في الحل بالإستعانة بـ ε أي الحرص على عدم إشباع الصف و العمود في نفس الوقت، حيث نحصل على جدول الحل الأساسي الأول التالي:

	D	E	F	Ai
A	72 (1)	24	56 (ε)	1
B	48	56 (1)	40	1
C	64	32 (ε)	40 (1-ε)	1
Bj	1	1	1	3

جدول8-23

بأسلوب التخطي يتم إختبار الحل إذا ما كان أمثلا، حيث نجد:

$\sigma_{AE}=24-56+40-32=-24$
$\sigma_{BD}=48-72+56-40+32-56=-32$
$\sigma_{BF}=40-40+32-56=-24$
$\sigma_{CD}=64-72+56-40=8$

و معلوم أنه في حالة التعظيم نكون أمام الحل الأمثل إذا كانت كل التكاليف الحدية غير موجبة، و حيث أن $\sigma_{CD}=8$ لذلك فإن هذا الحل غير أمثل، إذ ينبغي إدخال الخلية CD الى الحل، و عليه فبإجراء التحويلات اللازمة على مسار هذه الخلية نحصل على الجدول التالي:

	D	E	F	ai
A	72 (ε_1)	24	56 (1)	1
B	48	56 (1)	40	1
C	64 ($1-\varepsilon$)	32 (ε)	40	1
bj	1	1	1	3

جدول8-24

أيضا بأسلوب التخطي يتمّ إختبار الحل إذا ما كان أمثلا، حيث نجد التكاليف الحدية على النحو التالي:

$\sigma_{AE}=24-32+64-72=-16$
$\sigma_{BD}=48-56+32-64=-40$
$\sigma_{BF}=40-56+72-64+32-56=-32$
$\sigma_{CF}=40-56+72-64=-8$

يلاحظ أن كل التكاليف الحدية صارت غير موجبة، و بالتالي فإن الجدول السابق يتضمن الحل الأمثل.

بإهمال القيمة ε المساعدة من الجدول نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

	D	E	F	ai
A	72	24	56 (1)	1
B	48	56 (1)	40	1
C	64 (1)	32	40	1
Bj	1	1	1	3

جدول8-25

و هو نفس الحل المتوصل اليه بطريقة الحصر الإحتمالي و طريقة التخطي أي:

الحافلة C تخصص للحي D بربح يقدر بـ 64.000 دينار شهريا.
الحافلة A تخصص للحي F بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهريا.
الحافلة B تخصص للحي E بربح يقدر بـ 56.000 دينار شهريا.
أي أن أعظم ربح يجنى من هذا التخصيص يقدر بـ:
176.000 دينار شهريا.

ثالثا: حالة خاصة: في حالة ما إذا كان عدد الأسطر لا يساوي عدد الأعمدة، أي عدد الآلات لا يساوي عدد الوظائف، فإنه يتم اللجوء الى إضافة إما سطر وهمي أو عمود وهمي حسب الحالة (تعظيم أو تدنئة) تكون فيه تكاليف أو أرباح التخصيص صفرية، و يتم بعد ذلك إيجاد الحل الأمثل بأية طريقة من الطرق التي تم التطرق اليها، ثم يتم في النهاية إهمال العمود أو السطر الذي تمت إضافته، لتبقى إما آلة بدون تخصيص أو وظيفة بدون آلة.

مثال8-9: أوجد أمثل تخصيص للحافلات D,C,B,A لنقل مجموعة من العمال الى المصانع G,F,E، إذا علمت أن تكاليف النقل لكل حافلة الى كل مصنع هي بمئات الدينارات كما يلي:

	E	F	G
A	25	39	23
B	23	45	15
C	16	38	10
D	22	28	16

جدول8-26

نلاحظ أن عدد الحافلات هو 4 بينما عدد الاتجاهات هو 3، أي أن عدد الأسطر أكبر من عدد الأعمدة، لذلك نقوم بإضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية، فنحصل على الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	25	39	23	0
B	23	45	15	0
C	16	38	10	0
D	22	28	16	0

جدول8-27

نوجد الحل بالطريقة الهنغارية:

-أقل قيمة في السطر الأول هي 0.

-أقل قيمة في السطر الثاني هي 0.

-أقل قيمة في السطر الثالث هي 0.

و بالتالي لا يحدث أي تغيير على مستوى الأسطر.

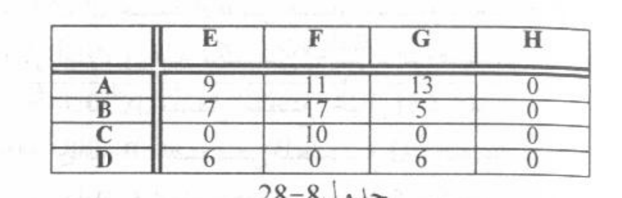
-أقل قيمة في العمود الأول هي 16.

-أقل قيمة في العمود الثاني هي 28.

-أقل قيمة في العمود الثالث هي10.

-أقل قيمة في العمود الرابع هي0.

بإجراء التغييرات نحصل على الجدول التالي:



	E	F	G	H
A	9	11	13	0
B	7	17	5	0
C	0	10	0	0
D	6	0	6	0

جدول8-28

و من ثم فإن الجدول التالي يظهر الإطارات الأقل التي تغطي الأصفار، و عددها 3 و هي أقل من عدد الصفوف و الأعمدة، و بالتالي فالحل غير أمثل، لذلك نختار أقل قيمة من القيم غير

	E	F	G	H
A	9	11	13	0
B	7	17	5	0
C	0	10	0	0
D	6	0	6	0

جدول8-29

المغطاة و هي 5 و نطرها من القيم غير المغطاة و نضيفها الى تقاطع الأطر فنحصل على الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	4	6	8	0
B	2	12	0	0
C	0	10	0	5
D	6	0	6	5

جدول8-30

و يلاحظ الآن أن عدد الأطر صار مساويا لعدد الأعمدة وبالتالي فإن الحل صار أمثلا، و عليه يمكن إجراء التخصيص التالي:

- الحافلة A تخصص للمصنع الخيالي H بتكلفة 0.
- الحافلة B تخصص للمصنع G بتكلفة 23
- الحافلة C تخصص للمصنع E بتكلفة 16
- الحافلة D تخصص للمصنع F بتكلفة 28

و يظهر ذلك الجدول التالي:

	E	F	G
A			
B			15
C	16		
D		28	

جدول8-31

و تبلغ التكاليف الكلية: $Z=15+16+28=59$ مائة دينار.

ويلاحظ أننا أهملنا المصنع الوهمي المضاف، دلالة على أن الحافلة A تبقى دون تشغيل.

تمارين

تمرين1: إشرح ماذا تدرس مسائل التخصيص، و ماهي طرق حلها.

تمرين2: قدم مسألة تصورية أقرب الى الواقع حول مسائل التخصيص.

تمرين3: يتنافس أربع مقاولين على إنجاز أربع مشاريع تابعة لإدارة مركزية، لتحمل أقل التكاليف حصرت الإدارة تكاليف تخصيص كل مقاول لكل مشروع، في الجدول التالي:

التكاليف بملايين الدينارات

	مشروع1	مشروع2	مشروع3	مشروع4
مقاول1	5	10	8	4
مقاول2	2	10	5	7
مقاول3	3	8	5	1
مقاول4	6	15	7	2

المطلوب ، إستعمل طريقة الحصر الإحتمالي و الطريقة الهنغارية و طريقة النقل لإيجاد أفضل تخصيص تقترحه على الإدارة.

تمرين4: ما هو أفضل تخصيص لمجموعة من العمال على مجموعة من الآلات إذا كان الوقت الذي يحتاجه كل عامل على كل آلة بالساعات محدد في الجدول التالي:

	آلة1	آلة2	آلة3	آلة4
عامل1	5	7	4	2
عامل2	4	5	6	8
عامل3	6	3	1	2
عامل4	1	5	3	4

إستعمل جميع طرق الحل في إيجاد أفضل تخصيص، و حدد الوقت الأدنى لهذا التخصيص.

تمرين5: الجدول التالي يظهر العوائد المحققة من جراء تخصيص مجموعة من العمال على مجموعة من الآلات في إحدى شركات الطباعة.

العوائد بمئات الدينار شهريا.

	آلة1	آلة2	آلة3	آلة4
عامل1	5	–	2	10
عامل2	7	4	–	5
عامل3	10	8	1	6
عامل4	–	4	3	8

المطلوب: ماهو أفضل تخصيص تقترحه على الشركة و ما هي قيمة العائد الأعظم لهذا التخصيص.

تمرين6: شركة طيران جديدة تمتلك 5 طائرات متفاوتة الحمولة و الخصائص، منحت لها مديرية النقل الجوي رخصة لإستغلال 5 خطوط من و الى العاصمة، الدراسة التحليلية التي قامت بها أضفت الى تحديد الأرباح الشهرية الممكن جنيها عند كل تخصيص و هي موضحة في الجدول التالي:

الخط / الطائر	تندوف	بشار	تمنراست	قسنطينة	وهران
طائرة1	100	120	80	130	130
طائرة2	80	70	70	60	50
طائرة3	70	60	50	30	30
طائرة4	20	30	25	10	10
طائرة5	120	110	90	150	150

المطلوب أوجد أفضل تخصيص تقترحه على الشركة بإستعمال جميع طرق الحل، و حدد أعلى ربح تحققه الشركة من التخصيص المقترح.

الفصل التاسع
نظرية القرارات

تقديم: من أخطر ما يواجه المسير في يوميات الإشراف والتوجيه اتخاذ قرارات يكون لها الأثر المباشر على حياة المؤسسة التي يشرف عليها سواء بالإيجاب أو السلب، و كثيرا ما تكون أمامه بدائل كثيرة، منطق التسيير العقلاني يفرض عليه إختيار أحسنها، غير أن مسألة إختيار هذا الأحسن ليست بالأمر الإعتباطي، إذ يجب أن يكون مبنيا على أسس قريبة من اليقين، غير أن هذا لا يكون متوفرا في جميع الحالات، فيكون لمنطق التجربة دورا في إختيار البديل الأحسن بحكم التجارب السابقة، و قد يكون لمنطق التحليل و تبسيط النتائج الممكنة لهذه البدائل دورا في تحديد ذلك، غير أن المسير الناجح هو الذي يعتمد على الطرق العلمية في اتخاذ قراراته بخصوص مجموعة البدائل المتاحة لإختياراته لإتخاذ القرار السليم.

و الواقع هو أن مهمة صنع القرار في المؤسسات التي تسير وفق الضوابط الإدارية ليست من صنع شخص المسير وحده، بل هي مهمة مشتركة بين جميع نواب هذا المسير و رؤساء الدوائر والأقسام التي تتكون منها المؤسسة، بحكم أن القرار الواحد يمكن أن تتأثر به كل الدوائر و الأقسام و المصالح ، و يمكنها أن تساهم في إنجاحه.

و لعل أخطر القرارات التي تواجه الهيئة المسيرة هي القرارات المتعلقة بظواهر عدم التأكد بحكم أن المؤسسة هي عنصر في محيط مليء بالمتغيرات، فما يكون مؤكدا في زمن ما قد لايكون كذلك بعد فترة، و ماهو صحيح في زمن ما قد يكون خاطئا بعد ذلك، و ما يقع خلال فترة قد لا يتكرر بعد فترة أخرى، وإذا تكرر فليس بالضرورة بنفس الكيفية، و هذا ما كان مبررا

لإيجاد أساليب لاتخاذ قرارات التسيير بهدف تحقيق الإستغلال الأمثل لمختلف موارد المؤسسة.

أولا: مفهوم القرار و العوامل المؤثرة على اتخاذه:
يمكن تعريف القرار بأنه عصارة نهاية مرحلة تقييم المنافع النسبية للبدائل المتاحة، بحيث يتم إختيار امثلها لتنفيذه.

ومن العوامل المؤثرة على عملية اتخاذ القرار ما يلي:

- تخمين النتائج المتوقعة لكل بديل من البدائل المتاحة.
- الإحتمالات التي يمكن أن ترتبط بالنتائج.
- الأهداف التي ترغب المؤسسة في الوصول اليها.
- القيود و المحددات البيئية التي يمكن في ضوئها تنفيذ البديل، و من ذلك مدى توفر التمويل اللازم، مدى توفر الكفاءة البشرية، المدة اللازمة، إضافة الى القيود الخارجية المتعلقة بالتقنين العام.
- المعيار الذي يتخذه المسير أو القائم على تقييم البدائل في مقارنة البدائل المختلفة مع بعضها البعض.

و هي عوامل تجتمع كلها أو بعضها في اتخاذ البديل الأمثل.

ثانيا: الطرق المتبعة لمواجهة مشاكل التسيير: هناك العديد من الطرق المساعدة على مواجهة مشاكل التسيير اليومية و اتخاذ القرارات المناسبة بشأنها، و من ذلك ما يلي:

1- إستعمال الخبرة السابقة: تعتبر السيرة الذاتية جدا مهمة في اختيار المسير، حيث تكتسي تجاربه السابقة أهمية بالغة في مساعدته على اتخاذ القرارات المناسبة، إذ يمكن أن يوظف هذه الخبرة في معالجة المشاكل المشابهة لمثيلاتها التي صادفته في الماضي، إذ ينطلق من فلسفة ما صلح في الماضي في ظروف مماثلة يصلح في الحاضر في نفس الظروف.

2- عن طريق الملاحظة و الرصد: يمكن للمسير أن يتخذ قراراته بناء على الملاحظة و رصد آراء الآخرين وتجاربهم في حل المشاكل المماثلة، و المسير الناجح هو الذي يكون على اطلاع بتفاصيل ما يحدث بالمؤسسات المشابهة لمؤسسته من حيث النشاط، حيث يستفيد من تجاربها و حتى و إن كانت صفة المناسبة تستوجب السرية في اتخاذ القرارات فإن خبرته و دبلوماسيته تستطيع إنتزاع الكثير من المعلومات حول تلك المؤسسات المنافسة.

3- تطبيق الدراسات النظرية: يمكن للمسير الإستعانة بما كتب و نظّر حول مشاكل مشابهة في كتب الإدارة و التجارة و الصناعة و غيرها، غير أن نتائج ذلك قد لاتكون أكيدة.

4- الطريقة العلمية: و هي أفضل الطرق التي يمكن أن يستند عليها المسير في اتخاذ قراراته، و هي ليست متاحة لأي إداري في المؤسسة، لذا يتحتم على المسير أن يكون مختصا في مجال الإدارة و التسيير، حتى يكون ملما بمختلف الطرق العلمية، و هذا ما سنركز عليه في هذا الفصل.

5- الإستعانة بمكاتب الدراسات: في حالة ما إذا تعذر عليه اتخاذ أي من هذه الطرق، فإنه يمكن اللجوء الى بعض مكاتب الدراسات المتخصصة في انجاز دراسة تمكنه من اتخاذ القرار المناسب، و لا شك أن هذه المكاتب يمكنها الإستعانة بأي من الطرق السالفة الذكر.

ثالثا: مراحل عملية اتخاذ القرارات: تمر عملية اتخاذ القرار بمجموعة من المراحل نوردها في ما يلي:

1- التحديد الدقيق للمشكلة: إذ يتعين على متخذ القرار أن يضبط كل جوانب المشكلة و يفهمها فهما جيدا، من

حيث المكان و الزمان و الإنعكاسات، أي أن يجيب عن ماهية المشكلة، في أي قسم طرحت، ماهي محدداتها...الخ، فإذا كانت المشكلة هي التوزيع، فعليه أن يحدد المادة المراد توزيعها، والقسم الذي تنتج فيه، الأماكن التي يراد التوزيع فيها، وسائل النقل المطلوبة و تكاليف النقل، أدوات حفظ المادة من التلف، ثم عليه أن يحدد العناصر المحيطة، فيما إذا كانت منتجات مثيلة منافسة لها، و ماهي أسعار المنتجات المنافسة، و مجال توزيعها......الخ.

2- تحديد القرارات البديلة: بعد التحديد الدقيق للمشكلة يتطلب الأمر إعداد و تحديد مختلف القرارات الممكنة المتعلقة بالمشكلة و ما ينجر عنها من منافع أو خسائر، وبمعنى آخر، تحديد القرارات التي يمكن الإختيار بينها و التي تكون مجموعة البدائل الممكنة.

3- تحديد كل الأحداث المستقبلية: أي الأحداث التي يمكن أن تلي كل قرار من القرارات البديلة لبعضها البعض، مع مراعاة أن تكون تلك الأحداث مستقلة عن بعضها البعض.

4- جمع البيانات و المعلومات الخاصة بكل بديل: فعملية اتخاذ القرار لكل بديل من البدائل المشار إليها أعلاه تتطلب أن تكون البيانات الخاصة بكل منها متوفرة ووافية، سواء كانت تلك البيانات متعلقة بكميات المواد أو الموارد البشرية أو غيرها من البيانات المهمة و التي تكون حاسمة في اتخاذ القرار.

5- إختيار معيار المفاضلة بين مختلف البدائل: و الذي يمكن على أساسه اتخاذ القرار، بحيث يساعد

هذا المعيار من الوصول الى الهدف الذي من أجله سيكون القرار.

6- إعداد جدول العوائد أو الخسائر أو هما معا: بحيث نقوم بتلخيص كامل المعطيات من عوائد متوقعة أو خسائر متوقعة أو هما معنا في جدول سيكون قاعدة الإنطلاق لاتخاذ القرار، باستعمال الطريقة العلمية للفصل فيها.

رابعا: خطوات الطريقة العلمية: إن إستخدام الطريقة العلمية في حل المشاكل المختلفة للمؤسسة يتم من خلال مجموعة من الخطوات الأساسية و هي:

- **الخطوة الأولى: الملاحظة:** و تعني معايشة المسير للمشكلة، إذ عليه أن يحددها و يحللها الى عناصرها الأولية و يدرسها و يفهمها فهما صحيحا، مع فهم محدداتها و أسبابها وكيفية تصحيحها، و هذا ما يمكنه من تحديد الهدف الذي يجب الوصول اليه، بحيث يكون قابلا للقياس الكمي.
- **الخطوة الثانية: وضع الفرضيات:** ثاني خطوة في الطريقة العلمية بعد الإنتهاء من الخطوة الأولى، هي وضع فرضيات لتفسير المشكلة التي تمت ملاحظتها، و هنا تلعب الثقافة العلمية المتخصصة و الخبرة و بعد النظر دورا هاما في ذلك، إذ يتم تحديد الفرضيات و ترتيبها حسب أهميتها و مدى تأثيرها، وإستبعاد الأقل أهمية ليتم الرسو على الفرضيات الأساسية التي يتم إختبارها فيما بعد، كما يجب تحديد مدى تذبذب المتغيرات التي يتم تحديدها، و هي إما أن تكون:

• **متغيرات مهمة أو متغيرات غير مهمة**، حيث يتم إهمال غير المهمة لتحليل المشكلة و الإحتفاظ بالمهمة فقط، و إما أن تكون:

- **متغيرات ممكن التحكم فيها أو متغيرات لا يمكن التحكم فيها**، حيث يتم التعامل معها حسب الحالة.

- **الخطوة الثالثة: تكميم الفروض**: أي وضع الفروض في إطار كمي، أي وضع الفروض و صياغتها في شكل نموذج رياضي يأخذ أحد أشكال المسائل المعروفة في بحوث العمليات أو الإقتصاد القياسي أو غيرهما، و هذا قبل أن تتم الإجابة على مجموعة من التساؤلات منها:

- مدى أهمية كل متغير من المتغيرات في المسألة.
- مدى تأثير كل منها على مقياس الكفاءة.
- قوة كل متغير من المتغيرات المحددة في النموذج.
- معاملات و إشارات كل متغير

و يتم ذلك كله بفضل الفهم الجيد للمشكلة و الإلتزام الكامل بالخطوات السابقة.

- **الخطوة الرابعة: إختبار الفرضيات**: يتم ذلك من خلال بيانات و معلومات سابقة أو مشابهة أو عن طريق تعميق الملاحظة و القياس أو عن طريق التجربة أو باستخدام إحدى طرق إختبار الفرضيات المعروفة في الطرق الإحصائية.

- **الخطوة الخامسة: إختبار النموذج الأمثل**: بالوصول الى هذه المرحلة يعني أن المشكلة صارت قيد الحل، إذ أن إختيار النموذج و قبوله يعني أنه حصل فهم كامل للمشكلة و صار بالإمكان توظيف إحدى طرق الحل لإيجاد النتائج و الوصول الى الهدف، وهي متاحة عن طريق المعلوماتية، إذ أن تكييف المسألة و جعلها تخضع لنموذج محدد يجعلنا نطبق البرنامج الآلي المكيف حسبها، للحصول على النتائج.

-**الخطوة السادسة: وضع الحل الأمثل المتوصل إليه موضع التنفيذ**: إذ أن الحل الأمثل المتوصل اليه و الذي يجب

أن يكون منسجما و غير متناقض مع الواقع، يعطى في شكل قابل للتنفيذ في صيغة توصيات أو أوامر للمسؤولين على التنفيذ في الدوائر و الأقسام المختلفة للمسألة.

و إذا ما تم إحترام هذه الخطوات بشكل دقيق فإنه من المستبعد أن نجد عوائق داخلية تمنع تنفيذ الحل، غير أنه في أحيان قليلة نجد بعض العوائق التي تحد متخذي القرار من التنفيذ خاصة إذا لم يتم إدخالها في النموذج لصعوبة تكييمها، و من ذلك ما يلي:

- **تأثير المحيط العام للمؤسسة**: فبما أن المؤسسة خلية في محيط كامل يؤثر فيها و تتأثر به، فإنه يكون للظروف الإقتصادية و الإجتماعية و السياسية العامة تأثير عليها، كما أن المؤسسة قد لا تكون وحيدة في السوق، فيكون لمثيلاتها المنافسة تأثيرا واضحا على قراراتها.

- **تأثير وضعها الداخلي**: للوضع الداخلي للمؤسسة أهمية بالغة في الوصول الى أهدافها بتنفيذ البرامج التي تعطيها الطريقة العلمية، و من ذلك علمية هيكلها التنظيمي وكفاءة العمالة و الإدارة، و سرعة الإستجابة للطلبات وخلوها من التراعات بين النقابات و الإدارة و خلوها من صور الفساد...الخ، و لكل ذلك تأثير على الأهداف المراد الوصول اليها و التي تتيحها الطريقة العلمية.

- **تأثير المسير**: لشخصية المسير أهمية كبيرة في تجسيد البرامج المتوصل اليها بالطريقة العلمية، فالمسير قد يكون شخصية قوية أو ضعيفة أو بين هذه و تلك، و طبقا لذلك فقد يكون مجازفا أو حذرا، متسرعا أو متهورا أو متريثا، و كل ذلك يؤثر على تنفيذ القرار.

- **تأثير ظروف القرار**: قد يبنى القرار وفقا لنموذج لم يأخذ بعين الإعتبار ظروف الطلب و أوقاته، فيعطي

نتائج لزيادة الإنتاج في وقت يقل فيه الطلب، أو نتائج بتخفيض حجم الإنتاج في وقت يزداد فيه الطلب، الشيء الذي يزيد من تعميق مشكلة المؤسسة عوض حلها.

– **تأثير عنصر الزمن**: قد يكون هناك متسعا من الوقت لتنفيذ القرار و يكون لذلك نتائج جيدة، غير أنه في بعض الأحيان يتخذ القرار في ظرف ضيق الوقت و بالتالي قد لا يكون هناك متسعا من الوقت لدراسة البدائل و إختيار أحسنها.

خامسا: حالات إتخاذ القرارات: هناك ثلاث حالات أساسية تصادف المسير في اتخاذ قراراته، وهي حالة التأكد وحالة عدم التأكد و حالة المجازفة.

1- اتخاذ القرارات في حالة التأكد: حالة التأكد تفترض أن يكون المسير مدركا إدراكا كاملا بكل البدائل و بنتائج كل بديل من تلك البدائل، بحيث يكون العائد (أو الخسارة) الناجم عن كل بديل معروف ومحدد، و في هذه الحالة يتم إستخدام ما يسمى بالنماذج المحددة.

و في حالة ظروف التأكد نصادف الإمكانيات التالية:

أ- وجود عائد واحد لكل بديل: في هذه الحالة يكون لدينا عائد واحد محدد لكل بديل من البدائل المعروضة، حيث يتم الإعتماد على ما يسمى مصفوفة العائد أو جدول العائد، حيث يكون إستنباط القرار جد سهل كما في المثال التالي:

مثال 9-1: شركة طيران تقوم باستغلال أسطول يضم مجموعة من الطائرات، و نظرا لتقادم هذه الطائرات، قامت الشركة بإجراء دراسة من أجل رفع عائدها السنوي، حيث أضفت هذه الدراسة الى ما يلي:

- الإستمرار في العمل كما هو حال الأسطول يجعلها تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 200 مليون دينار.
- تحديث نفس الطائرات و تجهيزها بأجهزة حديثة يجعل الشركة تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 250 مليون دينار.
- الإستغناء عن طائرات الأسطول و إستبدالها بأخرى جديدة من الطراز الحديث و بنفس العدد، يجعلها تحقق أرباحا سنوية تقدر بـ 240 مليون دينار.

على إفتراض أنه لا توجد أية عوائق تحد من إمكانية تحقيق أي بديل من هذه البدائل، فما هو القرار الأمثل الذي يجب أن تتخذه إدارة الشركة؟.

للإجابة نقوم بإيجاد ما يسمى بجدول القرار (مصفوفة القرار) وهو:

رقم البديل	البديل	الربح المتوقع بآلاف الدينارات
1	الإستمرار في تشغيل الأسطول كما هو	200
2	الإحتفاظ بالأسطول مع تجديد التجهيزات	250
3	إستبدال كل الأسطول بأسطول جديد	240

جدول9-1

بملاحظة جدول القرار، يكون من البداهة إختيار البديل الثان باعتباره يؤدي الى أعلى ربح، أي الإحتفاظ بنفس الطائرات مع تحديد تجهيزاتها، و هذا ما يحقق لها ربحا سنويا يقدر بـ 250 ألف دينار.

ب- وجود أهداف متعددة لكل بديل: في هذة الحالة يكون لكل بديل عدة حالات تسمى بحالات الطبيعة، بحيث يكون لكل بديل عدة عوائد حسب حالات الطبيعة هذه، و يمكن للمثال التالي أن يوضح ذلك:

مثال9-2: بافتراض نفس الشركة، أبقت على نفس البدائل، غير أنها تريد تحقيق الأهداف التالية:

- زيادة الأرباح السنوية.
- زيادة عدد المسافرين على متن طائراتها.
- زيادة عدد الخطوط التي تشتغل عليها.

حيث أنها تولي عناية متفاوتة لكل هدف من هذه الأهداف بدرجات إحتمالية تبلغ 50% للهدف الأول، 10% للهدف الثاني و 40% للهدف الثالث.

فإذا كانت الأرباح السنوية و عدد المسافرين و عدد الخطوط المنتظرة حسب كل بديل كما في الجدول التالي:

	الحالات	الربح السنوي ألف دينار	عدد المسافرين ألف مسافر	الخطوط
	الإحتمال	0.5	0.1	0.4
البدائل	الإستمرار في تشغيل الأسطول كما هو	200	1000	30
	الإحتفاظ بالأسطول مع تجديد التجهيزات	250	1300	50
	إستبدال كل الأسطول بأسطول جديد	240	1200	40

جدول9-2

فالمطلوب، ما هو البديل الأفضل الذي يجب أن تختاره الشركة؟

لإستنباط البديل الأحسن نقوم بضرب قيم كل بديل في الإحتمال المرافق و نوجد الوسط المرجح بالإحتمال أي ما يسمى بالقيمة المتوقعة (أنظر المعادلة9-1) ، ونختار البديل ذي أكبر وسط مرجح، و ذلك كما يلي:

البديل	العملية	الوسط المرجح
البديل الأول	=30×0.4+1000×0.1+200×0.5	212
البديل الثاني	=50×0.4+1300×0.1+250×0.5	275
البديل الثالث	=40×0.4+1200×0.1+240×0.5	256

جدول9-3

يلاحظ أن البديل الثاني هو الفائز، حيث يبلغ الوسط المرجح بالإحتمال 275 و هو أكبر وسط، أي على الشركة أن تحتفظ بالأسطول مع تجديد تجهيزاته، و هذا ما يسمح لها بالحصول على أرباح تقدر بـ 250 ألف دينار، و زيادة عدد المسافرين الى 1300000 و زيادة عدد الخطوط الشغالة الى 50 خط.

2- **إتخاذ القرارات في حالة عدم التأكد:** حالة عدم التأكد هي الحالة التي يكون فيها متخذ القرار غير متأكد من إحتمالات الأحداث المتعددة، و ذلك بسبب عدم وجود تجارب في الماضي تمكنه من تقدير هذه الإحتمالات، و في هذه الحالة يمكنه أن يتخذ قراره بناء على أحد المعايير التالية:

أ- **معيار التفاؤل الكامل:** و يسمى أيضا معيار أعظم الأعظم (MaxiMax)، أو معيار هرويكز (HURWICZ)، و فيه يتم إختيار البديل الذي يحقق أكبر عائد أو أكبر ربح ممكن، أي يتم تحديد أحسن عائد لكل إستراتيجية ثم نأخذ أكبر عائد من تلك العوائد لكي نحدد الإستراتيجية المثلى.

ب- **معيار التشاؤم:** و يسمى أيضا معيار أقصى الأدنى (MaxiMin) أو معيار والد (WALD)، في هذا المعيار يتم إختيار البديل بنوع من التشاؤم فيختار البديل الذي يعطي أقل عائد أو ربح، أي أننا نحدد أولا أسوأ العوائد لكل إستراتيجية، ثم نأخذ الأحسن من تلك العوائد لإختيار الإستراتيجية المثلى حسب هذا المعيار.

ت- **معيار أدنى الأقصى:** (MiniMax) و يسمى أيضا معيار سافاج (SAVAGE) ، حيث يتم إختيار أكبر

العوائد لكل بديل ثم نختار أقل هذه العوائد لإختيار الإستراتيجية المثلى.

ث- **معيار أدنى الأدنى:** (MiniMin) أو معيار التشاؤم الكامل، في هذه الحالة يتصرف المسير بتشاؤم كبير، حيث يقوم باختيار أقل عائد أو ربح لكل بديل ثم يختار الأقل منها.

مثال9-3: مصنع ينتج الأقمشة الراقية بآلات من تكنولوجيا متوسطة، بعدما أصبحت له سمعة مقبولة في السوق أصبح يسعى لتعزيز عوائده المالية، لأجل ذلك قرر إجراء دراسة تساعده على اتخاذ قرار يصل به لتعظيم عوائده، فتم تحديد البدائل التالية:

- الإبقاء على المصنع كما هو.
- إدخال تعديلات على الآلات و إدخال تحسينات جديدة.
- إستبدال كل الآلات بآلات جديدة ذات تكنولوجيا حديثة.

كما تم تحديد ثلاثة مجالات لنشاطه التسويقي، و ذلك إما:

- بالتسويق المحلي فقط
- بالتسويق المحلي و الدولي
- بالتسويق الدولي فقط

و قد قدر العائد المتوقع حسب كل بديل من البدائل و حسب كل حالة من حالات التسويق كما يلي:

العائد بملايين الدينارات

الحالات / البدائل	حالة1 تسويق محلي فقط	حالة2 تسويق محلي ودولي	حالة3 تسويق دولي فقط
الإبقاء على المصنع كما هو	20	17	23
إجراءتعديلات وتحسينات على الآلات	14	19	15
إستبدال الآلات بآلات حديثة	18	9	31

جدول9-4

المطلوب أوجد القرار المناسب حسب كل معيار من معايير اتخاذ القرارات.

الإجابات:

أ- **بمعيار التفاؤل الكامل:** (MaxiMax) نقوم بتحديد أحسن عائد لكل استراتيجية ثم نأخذ أعظم عائد من هذه العوائد:

- أقصى عائد للبديل الأول هو: 23
- أقصى عائد للبديل الثاني هو: 19
- أقصى عائد للبديل الثالث هو: 31

نلاحظ أن أقصى عائد من هذه العوائد يعود للبديل الثالث وهو 31 مليون دينار، و بالتالي فإن القرار المناسب بمعيار التفاؤل الكامل هو أن يستبدل كل الآلات بأخرى حديثة و يسوق المنتوج بالخارج فقط.

ب- **بمعيار التشاؤم:** (MaxiMin) نحدد أقل العوائد لكل إستراتيجية ثم نأخذ أعظمها كما يلي:

- أقل عائد للبديل الأول هو: 17
- أقل عائد للبديل الثاني هو: 14
- أقل عائد للبديل الثالث هو: 9

نلاحظ أن أعظم هذه العوائد هو 17 مليون دينار و يعود للبديل الأول، أي أن القرار المناسب بهذا المعيار هو إبقاء المصنع كما هو على وضعه مع تسويق المنتوج داخليا و خارجيا.

ج- **معيار أدنى الأقصى:** (MiniMax) حيث نحدد العوائد العظمى لكل بديل و نأخذ أدناها.

- أقصى عائد للبديل الأول هو: 23
- أقصى عائد للبديل الثاني هو: 19
- أقصى عائد للبديل الثالث هو: 31

نلاحظ أن أدنى عائد من هذه العوائد هو 19 مليون دينار ويعود للبديل الثاني، أي أن القرار وفق هذا المعيار هو إدخال تعديلات و تحسينات على آلات المصنع مع التسويق الداخلي و الخارجي للمنتوج.

د-معيار أدنى الأدنى: (MiniMin)، حيث نحدد العوائد الدنيا لكل بديل و نختار أدناها كما يلي:

- أقل عائد للبديل الأول هو: 17
- أقل عائد للبديل الثاني هو: 14
- أقل عائد للبديل الثالث هو: 9

نلاحظ أن أدنى هذه العوائد هو 9 مليون دينار و يعود للبديل الثالث، أي على المصنع أن يستبدل كل الآلات و المعدات ويسوق منتوجه داخليا و خارجيا وفق هذا المعيار.

و الجدير بالذكر أنه يمكن أن يستخدم معيار التفاؤل التام والتشاؤم التام في إستنتاج أحسن إستراتيجية و هذا بالإعتماد على وزن إحتمالي لكل منهما، فإذا فرضنا أن الوزن الإحتمالي للتفاؤل التام هو 0.6 أي 60% و الوزن الإحتمالي للتشاؤم التام هو 0.4 أي 40% فإنه يمكننا استنتاج القرار باستخراج أعظم عائد لكل بديل ثم أدنى عائد لكل بديل ثم حساب الوسط الحسابي المرجح لهما و ذلك كما يلي:

	أعظم عائد	أدنى عائد	العمليات	الوسط المرجح
الإحتمال	0.6	0.4		
البديل الأول	23	17	-17×0.4+23×0.6	20.6
البديل الثاني	19	14	-14×0.4+19×0.6	17
البديل الثالث	31	9	-9×0.4+31×0.6	22.5

جدول9-5

معلوم أن الوسط المرجح عبارة عن مجموع القيم مضروبة في إحتمالاتها مقسومة على مجموع الإحتمالات و مجموع الإحتمالات هنا يساوي الواحد.

و واضح أن الوسط الأكبر هو 22.5 و يعود للبديل الثالث، ولإختيار الحالة الموافقة، يمكن ملاحظة العائد الأكبر في هذا البديل و هو 31 مليون دينار، و بالتالي فإن القرار المناسب هو تجديد كل الآلات و اعتماد التسويق الخارجي فقط.

يبقى أن نشير الى أن إختيار المعيار المناسب تتحكم فيه عوامل كثيرة داخلية و خارجية، تجعل متخذ القرار يفضل معيارا على معيار آخر، بفضل إطلاعه على تفاصيل واقع المؤسسة والأهداف التي يريد الوصول اليها، و بفضل إلمامه بالمحيط الخارجي لها أي بوضع الإقتصاد العام و بظروف العرض والطلب خاصة على السلع المنافسة من حيث الكميات والأسعار، و على طبيعة الزبائن و فترات الذروة في الطلب وفترات تدني الطلب، و بالقوانين المتعلقة بالنظام البنكي و مدى مرونته و غير ذلك من العوامل التي تجعله يخوض المفاضلة بين المعايير و استنباط القرار المناسب.

3- إتخاذ القرارات في ظروف المجازفة: اتخاذ القرار في ظروف المجازفة أو المخاطرة، يتم في ظروف عدم المعرفة التامة لحالات الطبيعة الممكن حدوثها، حيث لا تتوافر سوى معلومات في شكل إحتمالات وقوع كل حالة بناء على تخمينات يمكن أن تكون مستقاة من الماضي أو بناء على حالات مماثلة وقعت في مؤسسات أو شركات أو إدارات مماثلة، و في هذه الحالة يتم الإعتماد أساسا على بعض قواعد الإحتمالات خاصة التوقع.

و في هـذه الظـروف يمكـن لمتخـذ القـرار أن يلجــأ الى أحـد الطرق التاليـة:

أ- طريقـة القيمـة المتوقعـة: و تسـمى أيضـا معيـار بـايز (BAYES) حيث يتم ذلـك و فقـا للخطوتـين التـاليتين:

- يتم حساب العائد المتوقـع مـن كـل قـرار بديـل بإيجاد مجموع العوائد مضروبـة في الإحتمـالات المقابلـة لهـا.

و فكرة القيمـة المتوقعـة تعـود الى فكـرة الوسـط الحسـابي المرجـح بـالأوزان، حيـث نعتـبر الإحتمـالات عبـارة عـن أوزان، حيـث يحسب الوسط الحسابي المرجـح بالإحتمـالات كمـا يلـي:

$$\overline{X} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} \qquad 1-9$$

حيث: X_i عبارة عن العوائد (أو الخسائر، التكاليف).

P_i عبـارة عـن الإحتمـالات المقابلـة.

مـع: $I=1,2,3....n$

و حيـث أن مجمـوع الإحتمـالات المتعلقـة بالظـاهرة يسـاوي الواحـد (100%)، فتصبـح القيمـة المتوقعـة (الوسـط الحسـابي المرجح) عبارة عـن مجمـوع العوائـد في إحتمالاتها.

- يتم إختيار أكبر مجمـوع محصـل عليـه في حالـة التعظيم ليدل علـى أكـبر عـائد متوقـع، و بالتـالي يتـم إختيار القرار المناسب، (أو يتـم إختيـار أصغـر قيمـة متوقعـة في حالة التدنئـة)

مثـال9-4: بـالعودة الى المثـال9-3 و بـافتراض أنـه تم إعطـاء الإحتمـالات التاليـة لكـل حالـة: 0.5 للحالـة الأولى، 0.30 للحالـة

الثانيـة و 0.20 للحالـة الثالثـة، أي أن جـدول المعلومـات يصبـح على النحـو:

الحالات		حالة1	حالة2	حالة3
الإحتمالات		0.50	0.30	0.20
البدائل	البديل الأول	20	17	23
	البديل الثاني	14	19	15
	البديل الثالث	18	9	31

جدول9-6

المطلوب: ما هو البديل الأفضـل بطريقـة القيمـة المتوقعـة؟

فإن القيمة المتوقعة لكل بديل تكـون كمـا يلـي:

باستعمال المعادلة 9-1 نوجد القيمـة المتوقعـة لكـل بديـل كمـا هـي في الجدول التـالي:

		القيمة المتوقعة
القيمة المتوقعة لعائد البديل الأول:	=23×0.20+17×0.30+20×0.50	19.7
القيمة المتوقعة لعائد البديل الثاني:	=15×0.20+19×0.30+14×0.50	15.7
القيمة المتوقعة لعائد البديل الثالث:	=31×0.20+9×0.30+18×0.50	17.9

جدول9-7

يلاحظ أن أعلـى قيمـة متوقعـة للعـائد هـي 19.7 و تعـود للبديـل الأول و بالتالي فإنه يتم إختيـار هـذا البديـل.

ب- طريقـة المعيـار غـير الكـافي أو طريقـة الإحتمـالات المتسـاوية: و تسـمى أيضـا طريقـة لابـلاس (LAPLACE)، و هي تقـوم علـى أسـاس فكـرة أنـه ليـس لدينـا دليـل موضوعـي للتوزيـع الإحتمـالي لحـالات الطبيعـة المختلفـة، حيـث نجعلـها متسـاوية الحظـوظ بإعطائـها إحتمـالات متسـاوية، فـإذا كـانت لدينا ثلاث حـالات نجعـل إحتمـال كـل حالـة الثلـث (1/3)، و إذا كـانت لدينـا أربـع حـالات نجعـل إحتمـال كـل حالـة الربـع (1/4)...الخ.

مثال9-5: بالعودة الى المثال 9-3 أوجد أحسن بديل بطريقة المعيار غير الكافي.

بما أنه لدينا ثلاث حالات فنعطي لكل حالة إحتمال يساوي الثلث، ثم نحسب متوسط العائد المتوقع أي الوسط المرجح بالإحتمالات كما يلي:

الحالات	حالة1	حالة2	حالة3	العمليات	العائد المتوقع
الإحتمال	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
البديل الأول	20	17	23	=23×0.33+17×0.33+20×0.33	20
البديل الثاني	14	19	15	=15×0.33+19×0.33+14×0.33	16
البديل الثالث	18	9	31	=31×0.33+9×0.33+18×0.33	19.33

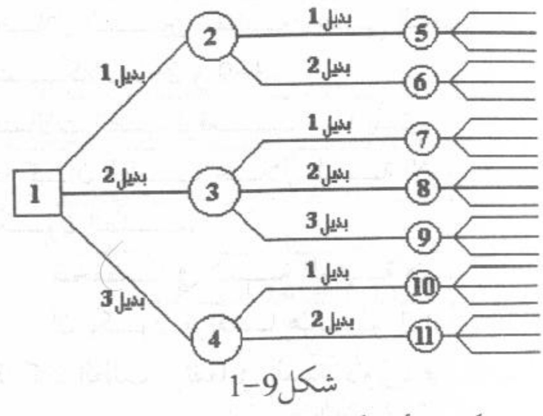
جدول9-8

نلاحظ أن أكبر قيمة متوقعة تعود للبديل الأول، و الحالة الموافقة هي الحالة الثالثة ، أي الإبقاء على وضع المصنع كما هو مع التسويق الدولي فقط.

4- شجرة القرارات: إن حالات القرارات التي تطرقنا لها سواء في ظروف التأكد أو في ظروف عدم التأكد أو في ظروف المجازفة هي قرارات من مرحلة واحدة و بالتالي فهي ساكنة من حيث الزمن، غير أن متخذ القرار قد تصادفه حالات تستلزم منه اتخاذ قرارات متتابعة، إذ بعد أن يرسو على قرار معين، يستلزم منه الأمر اتخاذ قرار موال بالإعتماد على الأول، ثم بعد اختيار القرار الثاني، قد يستلزم الأمر منه أيضا اتخاذ قرار موال ثالث وهكذا...، يجد نفسه اتخذ سلسلة من القرارات المتتابعة لأجل تعظيم العائد أو الأرباح أو تدنئة التكاليف أو الخسائر، و هذا ما يعبر عنه بنموذج القرارات المتتابعة والمعبر عنه أيضا بشجرة القرارات.

فشجرة القرار عبارة عن بيان متفرع، تعبر فروعه عن الإختيارات الممكنة و التي يجب على المسير أن يفاضل بينها، تفصل بين كل فرع و فرع موالي عقدة و هي عبارة عن نقطة أو دائرة، و تتضمن فروع الشجرة التقديرات الإحتمالية والعوائد أو الخسائر، حسب ما يتطلبه الأمر، كما يظهر ذلك في الشكل الموالي:

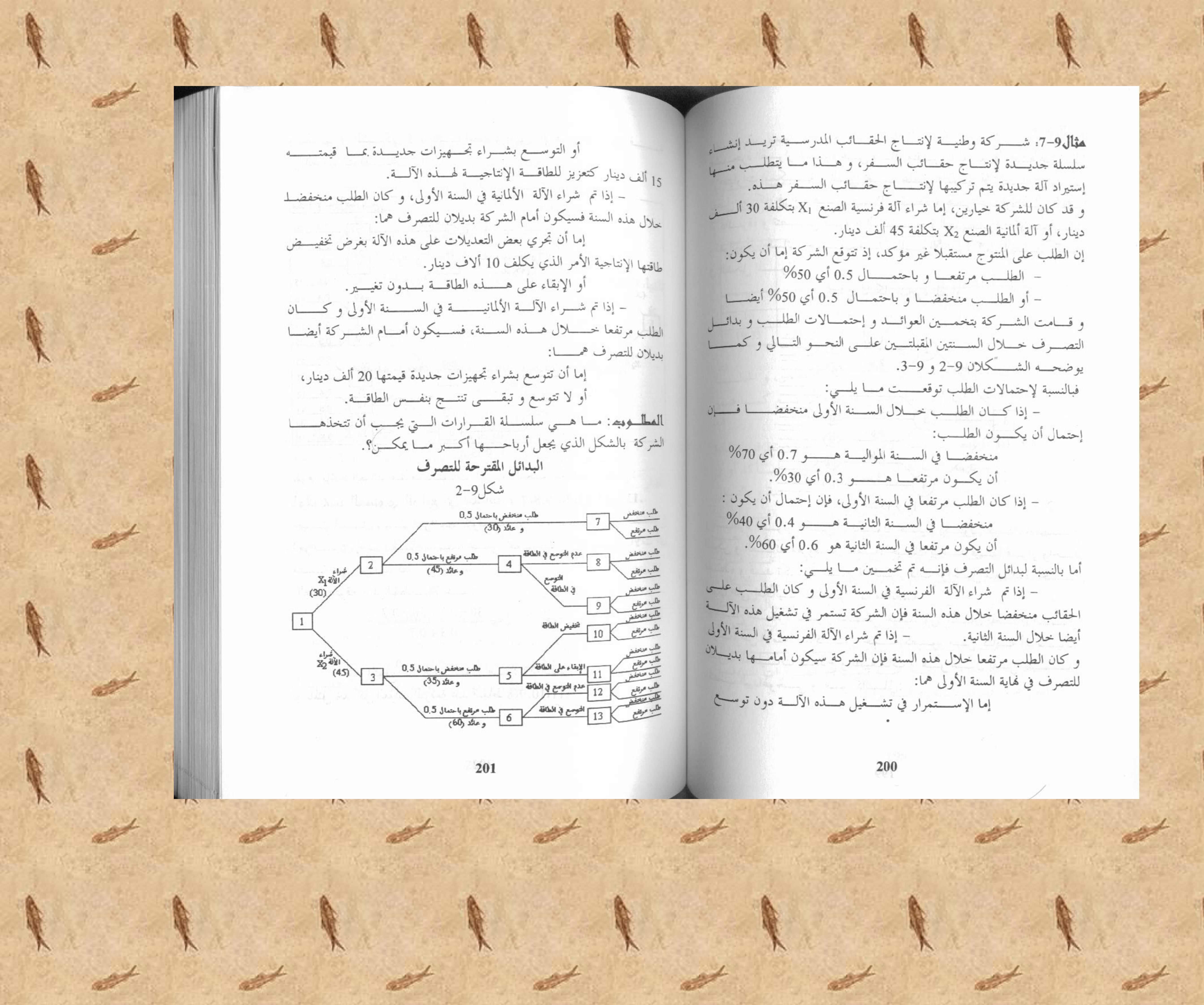
نموذج لشكل شجرة القرار



شكل9-1

و شجرة القرار يمكن أن تكون محددة يكون فيها البديل الممكن و العائد معروفين تماما، حيث يتخذ فيها قرار واحد فقط، و قد تكون شجرة القرار ذات مراحل متعددة، حيث تحتوي على إمكانيات لقرارات متتابعة.

لتوضيح شجرة القرار بشكل جيد أورد المثال المعدل التالي المقولب، عن الأستاذ الدكتور محمد كعبور من كتابه أساسيات بحوث العمليات نماذج و تطبيقات و هو مثال يفي جيدا بالمتطلب البيداغوجي و هو كالتالي:



مثال 9-7: شركة وطنية لإنتاج الحقائب المدرسية تريد إنشاء سلسلة جديدة لإنتاج حقائب السفر، و هذا ما يتطلب منها إستيراد آلة جديدة يتم تركيبها لإنتاج حقائب السفر هذه.

و قد كان للشركة خيارين، إما شراء آلة فرنسية الصنع X_1 بتكلفة 30 ألف دينار، أو آلة ألمانية الصنع X_2 بتكلفة 45 ألف دينار.

إن الطلب على المنتوج مستقبلا غير مؤكد، إذ تتوقع الشركة إما أن يكون:

- الطلب مرتفعا و باحتمال 0.5 أي 50%
- أو الطلب منخفضا و باحتمال 0.5 أي 50% أيضا

و قامت الشركة بتخمين العوائد و إحتمالات الطلب و بدائل التصرف خلال السنتين المقبلتين على النحو التالي و كما يوضحه الشكلان 9-2 و 9-3.

فبالنسبة لإحتمالات الطلب توقعت ما يلي:

- إذا كان الطلب خلال السنة الأولى منخفضا فإن إحتمال أن يكون الطلب:

منخفضا في السنة الموالية هو 0.7 أي 70%

أن يكون مرتفعا هو 0.3 أي 30%.

- إذا كان الطلب مرتفعا في السنة الأولى، فإن إحتمال أن يكون :

منخفضا في السنة الثانية هو 0.4 أي 40%

أن يكون مرتفعا في السنة الثانية هو 0.6 أي 60%.

أما بالنسبة لبدائل التصرف فإنه تم تخمين ما يلي:

- إذا تم شراء الآلة الفرنسية في السنة الأولى و كان الطلب على الحقائب منخفضا خلال هذه السنة فإن الشركة تستمر في تشغيل هذه الآلة أيضا خلال السنة الثانية. - إذا تم شراء الآلة الفرنسية في السنة الأولى و كان الطلب مرتفعا خلال هذه السنة فإن الشركة سيكون أمامها بديلان للتصرف في نهاية السنة الأولى هما:

إما الإستمرار في تشغيل هذه الآلة دون توسع

أو التوسع بشراء تجهيزات جديدة بما قيمته 15 ألف دينار كتعزيز للطاقة الإنتاجية لهذه الآلة.

- إذا تم شراء الآلة الألمانية في السنة الأولى، و كان الطلب منخفضا خلال هذه السنة فسيكون أمام الشركة بديلان للتصرف هما:

إما أن تجري بعض التعديلات على هذه الآلة بغرض تخفيض طاقتها الإنتاجية الأمر الذي يكلف 10 ألاف دينار.

أو الإبقاء على هذه الطاقة بدون تغيير.

- إذا تم شراء الآلة الألمانية في السنة الأولى و كان الطلب مرتفعا خلال هذه السنة، فسيكون أمام الشركة أيضا بديلان للتصرف هما:

إما أن تتوسع بشراء تجهيزات جديدة قيمتها 20 ألف دينار،

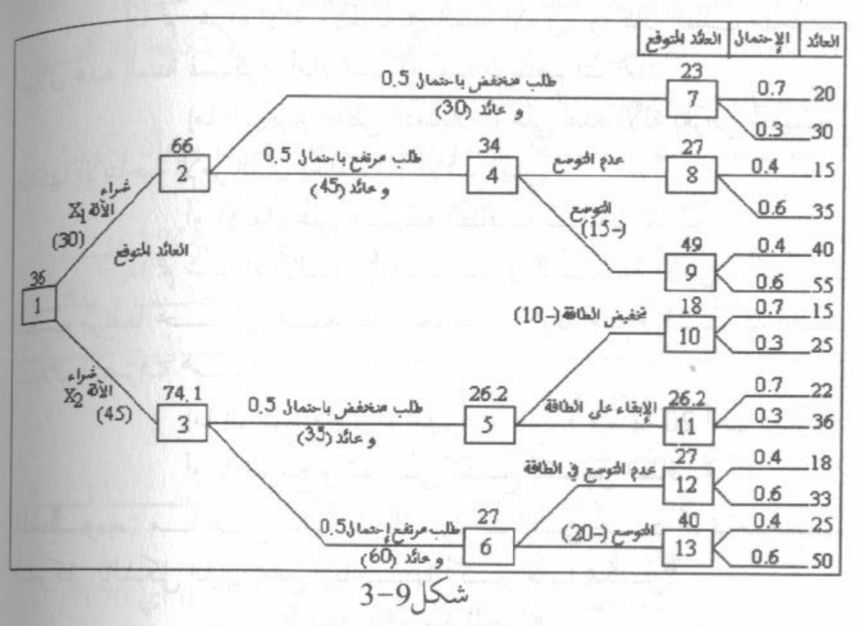
أو لا تتوسع و تبقى تنتج بنفس الطاقة.

المطلوب: ما هي سلسلة القرارات التي يجب أن تتخذها الشركة بالشكل الذي يجعل أرباحها أكبر ما يمكن؟.

البدائل المقترحة للتصرف

شكل 9-2

و يظهر في الشكل 9-3 بقية المصاريف و الإحتمالات إضافة الى العوائد المتوقعة.



شكل9-3

نقوم بإيجاد العوائد عند مستويات القرار المختلفة كما يلي:

أولا: عند المستوى الرابع أي عند النقاط 7،8،9،10،11،12 و 13.

حيث قمنا بتقييم العوائد المتوقعة، أي الوسط بإيجاد مجموع العوائد في إحتمالاتها مقسمة على مجموع الإحتمالات أي مقسمة على الواحد، فعلى سبيل المثال:

العائد المتوقع عند النقطة7 هو:

$$23 = \frac{30 \times 0.3 + 20 \times 0.7}{0.3 + 0.7}$$ أي:

العائد المتوقع عند النقطة 7 هو: 23 ألف دينار

و بالمثل نجد كل العوائد المتوقعة عند النقاط 8،9،10،11،12 و 13:

العائد المتوقع عند النقطة 8 هو: 27 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 9 هو: 49 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 10 هو: 19.7 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 11 هو: 26.2 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 12 هو: 27 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 13 هو: 40 ألف دينار

ثانيا: عند المستوى الثالث أي عند النقاط 4، 5، 6:

العائد المتوقع عند النقطة 4 :

في حالة التوسع هو: 49-15=34 ألف دينار

في حالة عدم التوسع هو: 27 أي نفس العائد النقطة8

واضح أننا نختار أعلى عائد عند هذه النقطة و هو34ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 5:

في حالة تخفيض طاقة الآلة2 هو: 19.7-10=9.7 ألف دينار

في حالة الإبقاء على الطاقة هو: 26.2 أي نفس العائد عند النقطة 11

واضح هنا أيضا أننا نختار أعلى عائد عند هذه النقطة وهو 26.2 ألف دينار

العائد المتوقع عند النقطة 6:

العائد في حالة التوسع هو: 40-20=20 ألف دينار

العائد في حالة التوسع هو: 27 ألف دينار، أي نفس العائد عند النقطة12

و نختار أعلى عائد و هو 27 ألف دينار.

ثالثا: عند المستوى الثاني أي عند النقطتين 2 و3:

العائد المتوقع عند النقطة 2 و هو الوسط المرجع بالإحتمالات أي:

(30+23)×0.5+ (45+34)×0.5=66 ألف دينار.

العائد المتوقع عند النقطة 3 و هو أيضا الوسط المرجع بالإحتمالات أي:

$0.5\times(35+26.2)+0.5\times(60+27)=74.1$ ألف دينار

رابعا: عند المستوى الأول أي عند النقطة 1:

العائد المتوقع في حالة شراء الآلة الأولى هو:

$66-30=36$ ألف دينار

العائد المتوقع في حالة شراء الآلة الثانية هو:

$74.1-45=29.1$ ألف دينار

أكبر عائد عند هذه النقطة هو 36 ألف دينار.

و كل هذه العمليات تظـــهر جليـا في شـكل الشـجرة أعـلاه، و هـو مايسمح لنا باتخاذ طريق يـؤدي بنـا القـرار الأمثـل.

واضـح أن الإدارة سـوف تشـتري الآلـة الفرنسـية بــ 30 ألــف دينــار في السـنة الأولى، ثم تنظـر إذا ماكـان الطلـب خـلال هـــذه السـنة منخفضـا فيجـب عـدم إجـراء تغيـيرات و تسـتمر الآلـة في التشغيل خلال السـنة الثانيـة، أمـا إذا كـان الطلـب مرتفعـا خـلال السنة الأولى فيجـب عليـها إجـراء توسـع في الطاقـة الإنتاجيـة بـدء من السنة الثانيـة، و هـذا يـؤدي بهـا للحصـول علـى أعلـى عـائد متوقع تحقيقه و هو 36 ألـــف دينـار.

لا شك أن شجرة القرار تسـمح لنـا باختبـار كـل النتائج، الإيجابيـة منها أو غير الإيجابيـة ، كمـا تسـمح بمناقشـة كـل بدائـل القـرارات و ما ينجر عنها، الشيء الذي ينجـر عنـه اتخـاذ قـرارات سـليمة.



تمرين1: إعط تعريفا للقرار و حـدد العوامـل المؤثـرة فيـه.

تمرين2: حدد مراحل عمليـة اتخـاذ القـرار و اشـرحها.

تمرين3: إعط تصورا لمسـألة يـراد اتخـاذ القراربشـأنها بمؤسسـة مـا في ظروف التأكد، مع إعطـاء حـل لهـا.

تمرين4: إعط تصورا لمسـألة يـراد اتخـاذ القـرار بشـأنها في ظـروف عدم التأكد، مع إعطاء حل لها بمختلـف معايـير اتخـاذ القـرار.

تمرين5: قررت شـركة إستكشـاف بترولية تقـديم مبلـغ 70 ألـف دينار لصاحب أرض وقـع عليـها إختيـار الإستكشـاف، كمـا تقـدم له مبلغـا إضافيـا يقـدر بــ 700 ألـف دينـار إذا مـا تم إكتشـاف وجود البترول فعـلا.

إن إهتمـام الشـركة بـالبحث في هـذه الأرض جعـل صاحبـها يعتقد أن ذلك مؤشر جيد علـى وجـود البـترول بـالفعل، لـذا فكـر في إكتشاف البترول بنفسه، و هذا مـا يجعلـه يوقـع عقـد مـع أحـد مكـاتب الخـبرة و الإستكشـاف بتكلفـة أوليـة تصـل الى 200 ألـف دينار يدفعـها حـتى و إن لم يكتشـف البـترول، و مـا دفـع صـاحب الأرض الى ذلك هو أنه يتوقـع عـائدا قـدره 3 مليـون دينـار إذا مـا إكتشف البـترول.

المطلوب:

أ- أوجد مصفوفـة القـرار

ب- ما هو القرار المتخـذ بمختلـف معايـير اتخـاذ القـرار.

ج- إذا كان إحتمال وجود البترول هو 0.55 ما هو القرار المتخذ.

د- بالإعتمـاد علـى شـجرة القـرار و باحتمـال 0.55 علـى وجود البترول ما هو القـرار المتخـذ.

تمرين6: مصنع للجبن يمكنـه إنتـاج 3 أنـواع أساسـية هـي: الجبـن العادي، الجبن المتوسـط الجـودة، الجبـن العـالي الجـودة. مـن خـلال

بيانـــات الســـنوات الماضيـــة تم إعـــداد مصفوفـــة العـــائد التاليـــة عنـــد مختلف مستويات الإنتـــاج و هـــي:

	جبن عادي	جبن متوسط الجودة	جبن عالي الجودة
لاإنتاج	10-	0	90-
إنتاج بسيط	20-	40	45
إنتاج متوسط	70	55	40-
إنتاج كبير	90	50	55-

المطلـــوب:

أ- أوجد القـــرار المناســـب بمختلـــف المعايـــير

ب- إذا كـــان إحتمـــال حـــالات الطبيعـــة هـــي 0.5 ، 0.4 و 0.1 على التوالي، فـــأوجد القـــرار المناســـب.

ج- أوجد القرار المناسب بمعيار الإحتمالات المتساوية.

د- أوجد القرار المناســـب باســـتخدام شـــجرة القـــرار

تمريـــن7: مؤسســـة مختصـــة في البيـــع بالجملـــة لأجـــهزة التلفـــاز و الأجهزة الملحقـــة بهـــا و منـــها أجـــهزة الفيديـــو و أجـــهزة الإستقبال الفضـــائي، و الجـــهاز المختلـــف الوظـــائف(فيديـــو، إســـتقبال فضـــائي)، نظـــرا للعـــائد المنخفـــض مـــن تســـويق أجـــهزة التلفـــاز لوحدها قررت البيـــع المشـــروط مـــع الأجـــهزة الأخـــرى، و حصـــرت مصفوفـــة العـــائد بـــآلاف الدينـــارات عنـــد مختلـــف التوليفـــات كمـــا يلـــي:

مصفوفة العائد بآلاف الدينارات للتوليفة الواحد.

	النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث	النوع الرابع
بيع بدون شرط	2	2.5	2	1.5
شرط جهاز فيديو	5	8	7	4
شرط جهاز إسستقبال فضائي	10	12	9	8
شرط جهاز مدمج متعدد الوظائف	20	18	18	16

المطلـــوب:

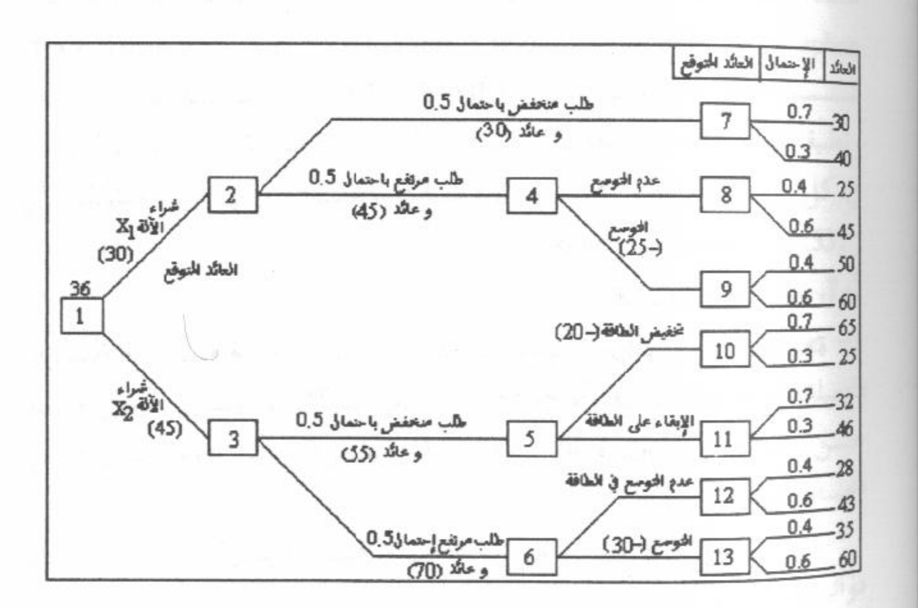
أ- ماهو القرار المتخـــذ بمختلـــف المعايـــير

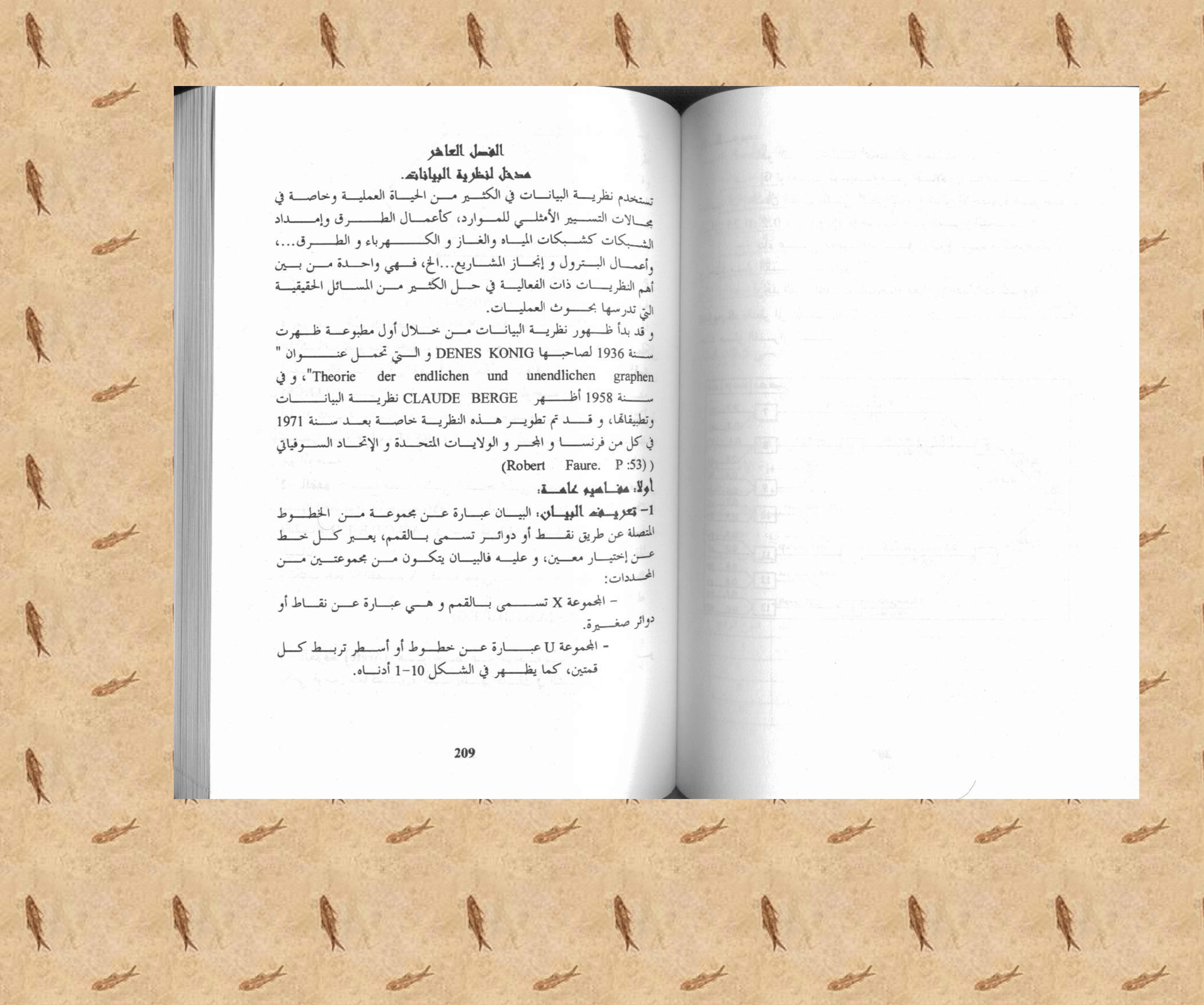
ب- إذا توقعـــت المؤسســـة مـــن خـــلال تجـــارب الســـنوات الماضية أن إحتمال الطلب علـــى كـــل نـــوع مـــن الأجـــهزة هـــو علـــى التوالي 0.25، 0.2 ، 0.2 و 0.35 فمـــا هـــو القـــرار المتخـــذ.

ج- بناء علـــى معطيـــات الســـؤال ب إرســـم شـــجرة القـــرار و حدد مسار القـــرار الســـليم.

د- أوجد القرار المناسب باستخدام معيار الإحتمالات المتساوية.

تمرين8: بالنظر الى المثـــال8-7 و مـــن خـــلال شـــجرة القـــرار التاليـــة حدد مسار القـــرار الســـليم.





الفصل العاشر

مدخل لنظرية البيانات.

تستخدم نظرية البيانات في الكثير من الحياة العملية وخاصة في مجالات التسيير الأمثلي للموارد، كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز و الكهرباء و الطرق...، وأعمال البترول و إنجاز المشاريع...الخ، فهي واحدة من بين أهم النظريات ذات الفعالية في حل الكثير من المسائل الحقيقية التي تدرسها بحوث العمليات.

و قد بدأ ظهور نظرية البيانات من خلال أول مطبوعة ظهرت سنة 1936 لصاحبها DENES KONIG و التي تحمل عنوان "Theorie der endlichen und unendlichen graphen"، و في سنة 1958 أظهر CLAUDE BERGE نظرية البيانات وتطبيقاتها، و قد تم تطوير هذه النظرية خاصة بعد سنة 1971 في كل من فرنسا و المجر و الولايات المتحدة و الإتحاد السوفياتي (Robert Faure. P :53))

أولا: مفاهيم عامة:

1- تعريف البيان: البيان عبارة عن مجموعة من الخطوط المتصلة عن طريق نقط أو دوائر تسمى بالقمم، يعبر كل خط عن إختيار معين، و عليه فالبيان يتكون من مجموعتين من المحددات:

- المجموعة X تسمى بالقمم و هي عبارة عن نقاط أو دوائر صغيرة.
- المجموعة U عبارة عن خطوط أو أسطر تربط كل قمتين، كما يظهر في الشكل 10-1 أدناه.

شكل:10-1

و يعبر عن البيان بالصيغة: G= (X,U)

إذا كانت مجموعة الخطوط أو الأسطر موجهة أي في شكل أسهم من القمة i الى القمة j أو العكس، فإنها تسمى **بالأقواس** (**ARCS**)، و يسمى البيان حينئذ **بالبيان الموجه**.

أما إذا كانت مجموعة الخطوط غير موجهة، فإن تلك الخطوط تسمى **بالأحرف** (**ARETE**)، و يسمى البيان حينئذ بالبيان غير الموجه.

2- القمم: (جمع قمة) هي النقاط التي تنطلق منها أو تصل إليها الخطوط الموجهة (الأقواس) أو غير الموجهة (الأحرف)، فالنقاط A,B,C,D,E ,F,G في الشكل 10-1 عبارة عن قمم للبيان.

و تكتب مجموعة القمم X كما يلي:

X={A,B,C,D,,E,F,G}

3- الحرف (Arete): هو خط غير موجه بين قمتين، و هو يكافئ قوسين متعاكسين، كما يظهر ذلك في الشكل10-6.

4- القوس (Arc): عبارة عن خط موجه أو سهم، يصل بين طرف ابتدائي (قمة الانطلاق) و طرف نهائي (قمة الوصول)، وقد يكون بين قمتين متتاليتين أو غير متتاليتين (انظر الشكل10-1).

فكل قوس يحدد بطرفيه الإبتدائي و النهائي.

و تكتب مجموعة الأقواس للشكل 10-1 كما يلي:

U={(A,B) ;(A,C) ;(A,D) ;(B,E) ;(B,D) ;(C,F) ;(D,G) ;(E,G) ;(F,D) ;(F,G)}

5- المسار(Chemin): مجموعة متتابعة من الأقواس يكون فيها الطرف النهائي لكل قوس هو الطرف الابتدائي للقوس الموالي باستثناء الطرف النهائي للقوس الأخير (شكل10-2).

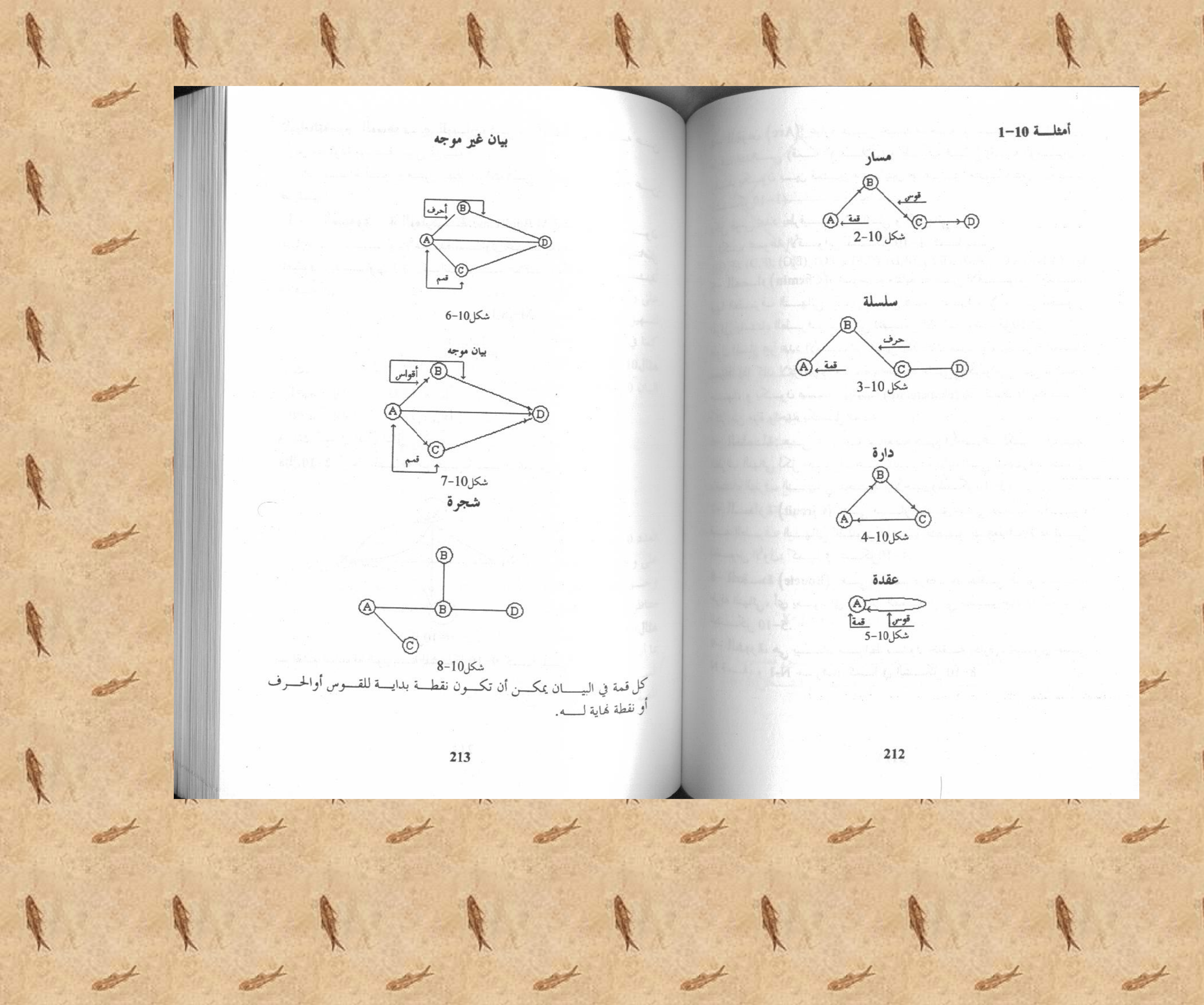
طول المسار هو عدد الأقواس التي يتكون منها، و يكون **المسار بسيطا** إذا كان لايمر سوى مرة واحدة على الأقواس التي يتكون منها، و يكون **مسارا أوليا** (élémentaire) إذا كان لا يلتقي أكثر من مرة واحدة بكل قمة.

6- السلسلة: هي مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي باستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير(شكل10-3).

7- الدارة (Circuit): هي مسار مغلق على نفسه، يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الابتدائي للقوس الأول، كما في شكل10-4.

8- العقدة (Boucle): هي سهم طرفه الابتدائي هو نفسه طرفه النهائي، أي يعود الى نفس القمة التي ينطلق منها كما في الشكل 10-5.

9- الشجرة: هي بيان مترابط بدون حلقة (دارة)، يحتوي على N قمة، و N-1 حرف، كما في الشكل 10-8.



مسار

شكل 10-2

سلسلة

شكل 10-3

دارة

شكل 10-4

عقدة

شكل 10-5

بيان غير موجه

شكل10-6

بيان موجه

شكل10-7

شجرة

شكل10-8

كل قمة في البيـــان يمكـــن أن تكـــون نقطـــة بدايـــة للقـــوس أوالحـــرف أو نقطة نهاية لــــه.

ثانيا: التقديم المصفوفي للبيان: كل بيان يمكن تقديمه عن طريق مصفوفة مربعة من الرتبة n .

و هناك عدة أنواع من المصفوفات التي يمكن أن يقدم عن طريقها:

1- المصفوفة البولينية: M.Booléenne فيها يكون لدينا عدد الأسطر و الأعمدة يساوي عدد القمم، أما عناصر المصفوفة فتساوي 1 إذا كانت توجد علاقة أو 0 إذا لم توجد علاقة أي:

$$M=[a_{ij}]$$

$$i=1,2,\ldots n$$
$$j=1,2,\ldots n$$

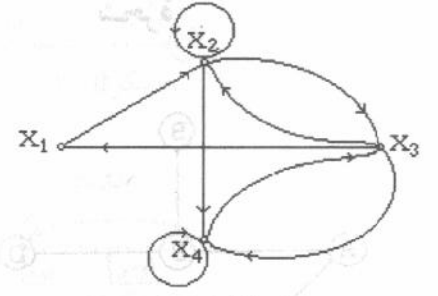
حيث:

$a_{ij}=1$ إذا $(x_i, x_j)\in U$

$a_{ij}=0$ إذا $(x_i, x_j)\notin U$

و ذلك كما في المثال التالي:

مثال10-2: أوجد المصفوفة البولينية للبيان التالي:



شكل10-9

يتم تقديم المصفوفة البولينية للشكل10-9 كما يلي:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1
x_4	0	0	1	1

يلاحظ أن القيمة 1 وضعت في الاتجاه الذي يذهب إليه القوس، أي من x_i الى x_j ، و القيم 1 الموجودة في قطر المصفوفة تدل على وجود عقدة، أي قوس يتجه الى نفس القمة.

لتسهيل كتابة المصفوفة فإنه يمكن الاستعانة بالجداول، وذلك كما في المثالين التاليين:

مثال10-3: أكتب البيان 10-6 في شكل مصفوفة بولينية.

البيان 10-6 غير موجه و بالتالي يمكن كتابته كما يلي:

القمم	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	1
D	1	1	1	0

جدول10-1

العدد 0 يدل أنه لا توجد علاقة بين القمتين، أما العدد 1 فيدل على وجود هذه العلاقة، و بما أن البيان غير موجه فيعني ذلك وجود علاقة في الاتجاهين، لذلك فيلاحظ أن مصفوفة البيان متناظرة، بالنسبة للقطر الصفري.

مثال10-4: أكتب المصفوفة البولينية للبيان 10-7.

بما أن البيان موجه فإن العلاقة بين القمم تكون فقط في اتجاه السهم، لذلك فإن مصفوفة البيان غير متناظرة. و تكون المصفوفة البولينية كما يلي:

القمم	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	0	0	0

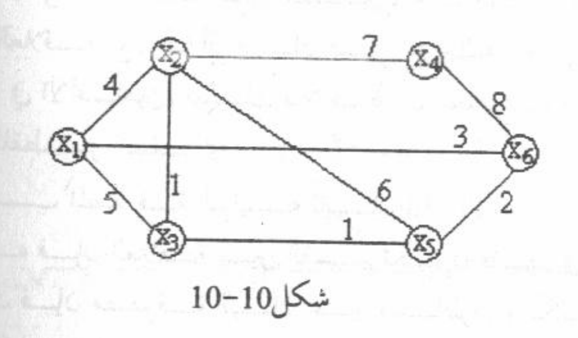
جدول10-2

و يلاحظ أن السطر الأخير كله معدوم ليدل على أنه لا ينطلق من القمة D أي قوس، و بما أن عناصر القطر كلها صفرية فإن ذلك يدل على أنه لا توجد عقدة في البيان.

و سوف نصطلح على تسمية البيان ابتداء من الآن **بالشبكة**.

2- **مصفوفة السعة**: تكون **الشبكة مقيمة** إذا كان كل قوس أو حرف فيها يمثل كمية تعبر إما عن الطول أو الحجم أو التكلفة...الخ، و في هذه الحالة يمكن أن نعبر عن الشبكة بمصفوفة تسمى **مصفوفة السعة**، حيث يمثل كل عنصر فيها حمولة القوس أو الحرف بين كل قمة و قمة أخرى، و إذا لم توجد علاقة بين قمتين فإنه يتم التعبير عن ذلك بالقيمة صفر.

مثال10-5: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الخطوط للشبكة الكهربائية بين مجموعة من القرى.



شكل10-10

المطلوب: عبر عن الشبكة في شكل مصفوفة للسعة.

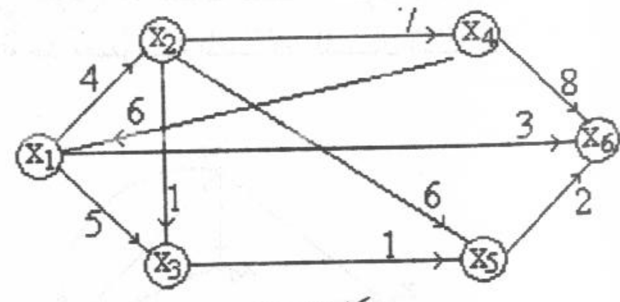
هذه الشبكة هي عبارة عن بيان غير موجه، و بالتالي فكل حرف يؤخذ في الاتجاهين، ذهابا و إيابا، لذلك فإن **مصفوفة السعة** تكون على النحو التالي:

القمم	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	4	5	0	0	3
X_2	4	0	1	7	6	0
X_3	5	1	0	0	1	0
X_4	0	7	0	0	0	8
X_5	0	6	1	0	0	2
X_6	3	0	0	8	2	0

جدول10-3

و هي مصفوفة متناظرة بالنسبة لقطرها الصفري.

مثال10-6: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الطرق بين مجموعة من القرى بالكيلومتر.



شكل10-11

المطلوب: أكتب مصفوفة السعة لهذه الشبكة.

هذه الشبكة هي بيان موجه، و بالتالي فإن سعة الأقواس تكون في اتجاه واحد فقط، و عليه فإن مصفوفة السعة تكون على النحو التالي:

القمم	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	4	5	0	0	3
X_2	0	0	1	7	6	0
X_3	0	0	0	0	1	0
X_4	6	0	0	0	0	8
X_5	0	0	0	0	0	2
X_6	0	0	0	0	0	0

جدول10-4

و تدل كل قيمة في مصفوفة السعة على سعة القوس أي حمولته ، إذا كانت قيمته أكبر من الصفر، أما إذا كانت مساوية للصفر فتدل على أنه لا توجد علاقة بين القمتين.

3- مصفوفة المساقط للبيان الموجه بدون دارة: فيها يكون:

$a_{ij}=1$ إذاكان القوس ينطلق من القمة،

$a_{ij}=-1$ إذا كان القوس يصل الى القمة.

$a_{ij}=0$ إذا كانت لا توجد علاقة

فالقيمة 1 تمثل الطرف الابتدائي للقوس و القيمة -1 تمثل الطرف النهائي للقوس، أما بقية قيم المصفوفة فتكون معدومة.

مثال10-7: أوجد مصفوفة المساقط للبيان التالي:

شكل10-12

بتطبيق المبدأ أعلاه نحصل على مصفوفة المساقط التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	1	-1	0	0
(x_1, x_4)	1	0	0	-1
(x_2, x_3)	0	1	-1	0
(x_2, x_4)	0	1	0	-1
(x_4, x_1)	-1	0	0	1
(x_4, x_2)	0	-1	0	1
(x_4, x_3)	0	0	-1	1

حيث: 1 هي القمة الابتدائية و -1 هي القمة النهائية.

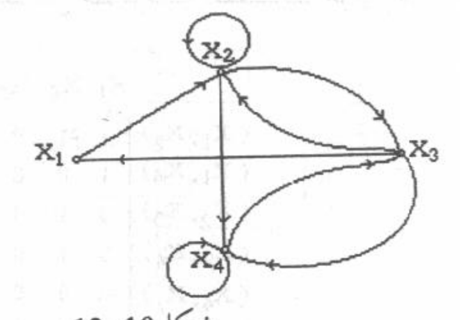
و يلاحظ أن كل القمم تشكل أطرافا إبتدائية و نهائية إلا القمة x_3 فهي تشكل أطرافا نهائية، لذلك لا يظهر في عمود x_3 سوى القيم -1.

كما أن عدد صفوف المصفوفة هو بعدد أقواس البيان.

4- مصفوفة الأقواس: عبارة عن المصفوفة البولينية معبر عنها برموز القمم، أخذا بعين الإعتبار الإتجاه من القمة i الى القمة j و ذلك كما في المثال التالي:

مثال10-8: عبر عن البيان 10-9 بشكل مصفوفة الأقواس.

البيان المشار اليه هو:



شكل10-13

مصفوفة الأقواس لهذا البيان يعبر عنها كما يلي:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
x_1 & x_1x_2 & & & \\
x_2 & & x_2x_2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\
x_3 & x_3x_1 & x_3x_2 & & x_3x_4 \\
x_4 & & & x_4x_3 & x_4x_4
\end{array}
$$

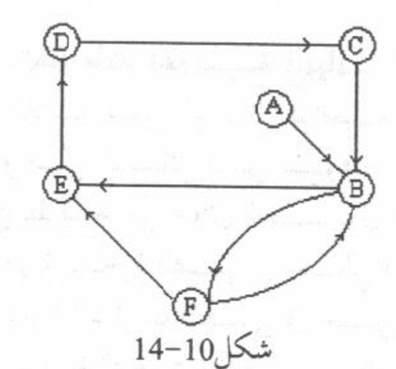
لاحظ أنه بدل أن توضع القيمة 1 عند وجود علاقة كما في المصفوفة البولينية فإنه يعبر عن ذلك برموز القمم.

ثالثا: تقديم البيان عن طريق جداول: يمكن أن يقدم البيان عن طريق إما جدول السوابق أو جدول اللواحق.

1- **جدول اللواحق**، فيه يتم وضع جدول بعمودين، يوضع في العمود الأول القمم و في العمود الثاني لواحقها أي الأطراف النهائية.

2- **جدول السوابق**، فيه يتم أيضا وضع جدول بعمودين، يوضع في الأول الأطراف الابتدائية و في الثاني توضع الأقواس التي تصل الى الطرف.

مثال10-9: قدم البيان التالي مرة بجدول اللواحق و أخرى بجدول السوابق.



شكل10-14

حسب التعريف أعلاه فإن الجدولين يقدمان كما يلي:

جدول اللواحق

اللواحق S(x)	القمم (X)
B	A
E, F	B
B	C
C	D
D	E
B, E	F

جدول10-5

S(x) هي مجموعة لواحق X.

جدول السوابق

السوابق P(x)	القمم (X)
-	A
A, C, F	B
D	C
E	D
B, F	E
B	F

جدول10-6

P(X) هي مجموعة سوابق X.

رابعا: إستخدامات نظرية البيانات: تستخدم نظرية البيانات في الكثير من المسائل الواقعية من مسائل بحوث العمليات، و من المسائل التي سوف نستخدم فيها نظرية البيانات و التي تطرقنا لها من خلال الفصول الموالية ما يلي:

- نظرية الشجرة المثلى في حالتي التعظيم و التدنئة.
- نظرية المسارات المثلى في حلتي التعظيم و التدنئة.
- نظرية التدفق الأعظمي. تحليل شبكات الأعمال وبالأخص طريقة CPM و أسلوب تقييم البرامج ومراجعة التقنيات المعروف بأسلوب PERT.

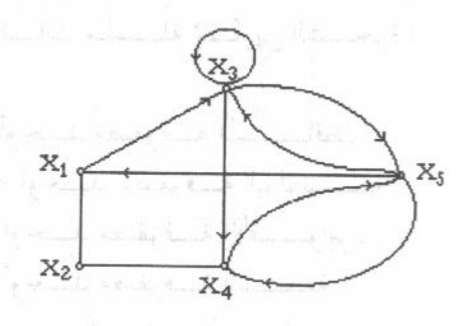
تمارين

تمرين1: اعط تعاريف مدعمة برسومات للمصطلحات التالية:

1- القمة 2- الحرف 3-القوس 4- الدارة

5- السلسلة 6-المسار 7- الحلقة.

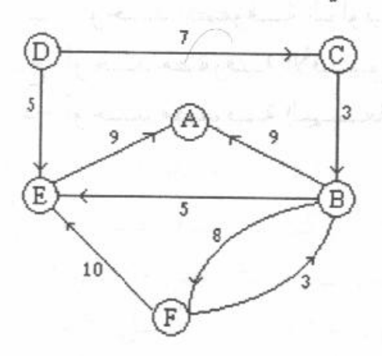
تمرين2: اليك البيان التالي:



المطلوب: أ- أوجد المصفوفة البولونية.

ب- أوجد مصفوفة الأقواس.

تمرين3: من البيان التالي:



أ- أوجد مصفوفة المساقط.

ب- أوجد المصفوفة البولونية.

ج-أوجد مصفوفة الأقواس.

د- أوجد مصفوفة السعة.

تمرين4: ارسم بيانا مصفوفته البولينية كما يلي:

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	0	1	0

تمرين5: من بيانات سلسلة تمارين الشجرة المثلى في الفصل الموالي:

أ- أوجد مصفوفة المساقط.
ب- أوجد المصفوفة البولونية.
ج-أوجد مصفوفة الأقواس.
د- أوجد مصفوفة السعة.

تمرين6: من بيانات سلسلة تمارين المسارات المثلى في الفصل الرابع:

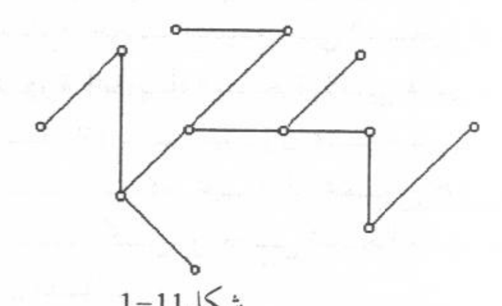
أ- أوجد مصفوفة المساقط.
ب- أوجد المصفوفة البولونية.
ج-أوجد مصفوفة الأقواس.
د- أوجد مصفوفة السعة.

الفصل الحادي عشر

نظرية الشجرة المثلى.

أولا: مفهوم الشجرة :كل بيان غير موجه و مترابط ولا يحتوي على أية حلقة (دارة) يشكل ما يصطلح عليه شجرة، أي أن الشجرة عبارة عن مجموعة من الأحرف مترابطة بينها عبر مجموعة من القمم، دون أن تشكل دارة أو حلقة مع بعضها البعض، كما يظهر في الشكل11-1.

بيان في شكل شجرة



شكل11-1

فإذا كان لدينا البيان: G=(X,U) به n قمة فإنه يمكننا تشكيل شجرة بعدد n-1 من الأحرف.

و يمكن أن نشكل من بيان واحد عدد من الشجيرات.

ثانيا: الشجرة المثلى: من كل بيان غير موجه يمكن الحصول على عدد من الشجرات، و الشجرة المثلى في البيان المقيم هي التي تعطي أقل حمولة ممكنة أي أقل تكلفة أو مسافة...الخ، أو أعظم حمولة أي أعلى الأرباح أو العوائد، أو التدفقات.

ثالثا: إستخدامات نظرية الشجرة المثلى: تستخدم نظرية الشجرة المثلى في إيجاد أقصر مسافة أو أقل تكلفة ...الخ أو، أعلى الأرباح أو العوائد.....الخ، عند ربط عدد من الأماكن

بشبكة كهربائية أو هاتفية أو قنوات...الخ، أي أنها تستعمل في الإمدادات الطولية، بهدف التحليل و إنجاز المشاريع بأخفض التكاليف أو جني أعلى الأرباح، فمهندسو الشركات الإنشائية للطرق و كوابل الهاتف و الكهرباء و المياه، تكون وسيلتهم من خلال المخططات الطولية المنجزة في شكل شبكات لتوضيح المسافات أو التكاليف أو الأرباح المتوقعة لكل خط بين نقطتين، و من ثم يمكن الإستفادة من خلال خوارزمية الشجرة المثلى من معرفة المسالك الممكنة التي تؤدي لإنجاز المشروع بأقل مسافة أو أقل تكلفة أو أعلى الأرباح أو العوائد.

و واضح إذن أننا نتكلم عن حالتين من الشجرة المثلى، الحالة الأولى هي الشجرة الدنيا، و الحالة الثانية هي الشجرة العظمى.

رابعا: حالة الشجرة الدنيا: الشجرة المثلى هي بيان غير موجه لا يتوي على أية دارة يتم الحصول عليه من بيان يحتوي على إمكانيات ربط متعددة، بحيث أن مجموع حمولة هذه الأحرف يكون أصغر ما يمكن، و تعطى إشكالية الشجرة الدنيا بشكل مشابه للمثال التالي:

مثال11-1: تريد المؤسسة الوطنية للكهرباء و الغاز إمداد شبكة كهربائية لتغطية عدد من القرى الريفية بالكهرباء.

الدراسة الأولية بينت إمكانيات الربط بين هذه القرى و كذا تكاليف الربط بآلاف الدينارات، حسب ما هو موضح في البيان التالي:

شكل11-2

حيث القمم A,B,C,D,E,F,G تمثل القرى، و الأحرف تمثل الخطوط الممكنة.

و يلاحظ أنه لاتوجد أحرف بين بعض القمم (القرى)، و هذا لإمكانية وجود موانع طبيعية كالجبال أو الغابات، أو موانع أخرى، و تظهر بجانب كل حرف تكلفة إنجاز الخط الكهربائي بين كل قرية و أخرى بآلاف الدينارات.

و يكون **المطلوب**: ما هي الشبكة الممكن اقتراحها و التي تسمح بتزويد جميع القرى (G , F , E , D , C , B , A) بالكهرباء و بأقل تكلفة ممكنة؟.

واضح أنه ينبغي علينا إنجاز الخطوط الكهربائية بأقل تكلفة، وهذا بالشكل الذي يجعل الكهرباء تصل الى كل قرية من القرى التي تظهر في الشبكة، و عبر خط وحيد.

وواضح من البيان أيضا أن الخطوط الواصلة بين كل قمة و قمة أخرى هي عبارة عن أحرف، الشيء الذي يجعل مصفوفته متناظرة بالنسبة للقطر، و يظهر ذلك من المصفوفة التالية التي تعبر عن البيان الوارد في الشكل11-2.

مصفوفة السعة للبيان 11–2

القمم	A	B	C	D	E	F	G
A	-	4	-	-	-	3	5
B	4	-	3	-	8	2	-
C	-	3	-	6	3	-	-
D	-	-	6	-	4	5	3
E	-	8	3	4	-	3	-
F	3	2	-	5	3	-	4
G	5	-	-	3	-	4	-

جدول11–1

و لحل مثل هذه المسائل، يتطلب الأمر البحث عن ما يسمى الشجرة الدنيا ضمن بيان مقيم، و يتم ذلك باستعمال إحدى الخوارزميتين التاليتين:

1- خوارزمية كريسكال: (J. B. KRUSKAL) ظهرت سنة 1956 ، و هي خوارزمية جد بسيطة، ملخصها كما يلي:

أ- نرتب الأحرف تصاعديا حسب حمولتها.

ب- نأخذ الأحرف الأقل قيمة تصاعديا و نرسمها، مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دارة) مع الأحرف التي سبق رسمها.

ج-نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها هو N-1.

و لحساب الحمولة الدنيا التي تعكس أقل تكلفة أو أقل مسافة...، نجمع حمولة الأحرف التي شكلت لنا شجرة.

ملاحظة: في حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نمايز بينها بإضافة الى بعضها قيمة صغيرة ε ، 2ε...

2- خوارزمية سولان : (G. SOLLIN)، ظهرت سنة 1961: لإيجاد أدنى شجرة بهذه الخوارزمية نتبع الخطوات التالية:

أ-نمايز بين الأحرف التي لها نفس الحمولة (القيم)، بإضافة ε ، 2ε..

ب- نأخذ أية قمة و نفحص الأحرف التي تتصل بها و نأخذ أقلها و نرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقيه.

ج- نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق و أن أخذت.

د- عند فحص جميع القمم و تكون النتيجة المحصلة هي شجرة تتصل بها جميع القمم، نكون حينئذ أمام الحل الأمثل،

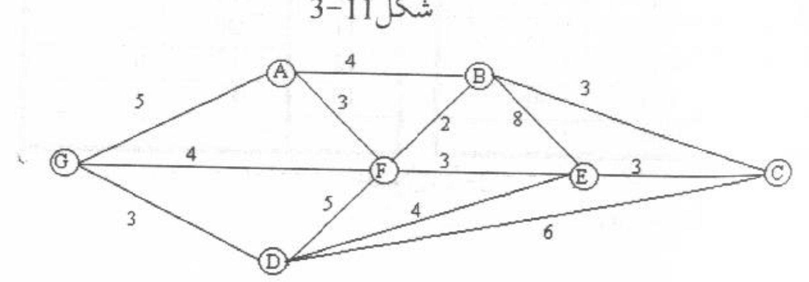
هـ-أما إذا فحصت جميع القمم لكننا حصلنا على عدد من الشجيرات (أي الفروع) فإن الحل الأمثل لم نصل اليه بعد، و عليه نبحث عن أقل الأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل في النهاية على شجرة بقيمة دنيا.

نجمع في النهاية حمولة الأحرف التي تشكل الشجرة فنحصل على التكلفة أو المسافة الدنيا.

مثال11-2: بالعودة الى المثال 11-1 ، ما هي الشبكة الممكن اقتراحها و التي تسمح بتزويد كل القرى بالكهرباء و بأقل تكلفة ممكنة.

الشبكة المشار اليها في المثال هي:

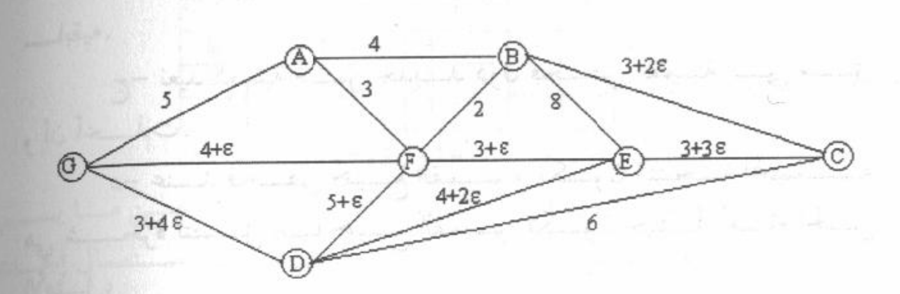
شكل11-3



والأمر هنا يتطلب إيجاد شجرة دنيا.

لأجل ذلك نطبق إما **خوارزمية كريسكال أو خوارزمية سولان**.

و قبل ذلك نمايز بين الأحرف المتساوية الحمولة كما يظهر في البيان التالي:



شكل11-4

لاحظ أنه يمكن التمييز بين الأحرف بشكل مختلف، دون أن يؤدي ذلك الى حل أمثل مختلف في القيمة الدنيا للتكلفة أو المسافة.

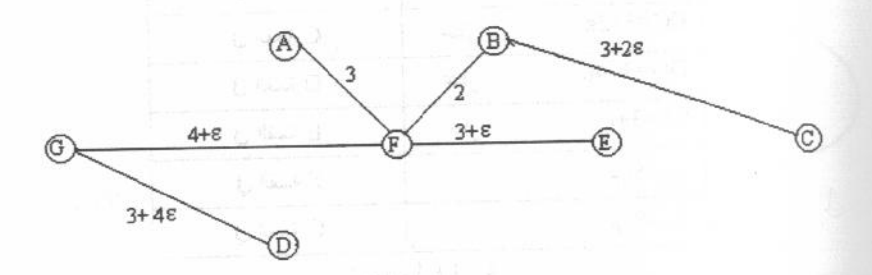
أ- الحل باستخدام خوارزمية كريسكال: بعد أن نمايز بين الأحرف المتساوية الحمولة، نرتب الأحرف تصاعديا حسب حمولتها دون تكرار، كما يظهر في جدول الترتيب التالي:

جدول الترتيب

الترتيب	الحرف	الحمولة
1	BF=	2
2	AF=	3
3	EF=	3+ε
4	BC=	3+2ε
5	CE=	3+3ε
6	DG=	3+4ε
7	AB=	4
8	FG=	4+ε
9	ED=	4+2ε
10	AG=	5
11	Df=	5+ε
12	DC=	6
13	BE=	8

جدول11-2

نبدأ بأقل حمولة و هي BF=2 و نرسمها، ثم ننتقل الى الحرف الموالي من حيث القيمة AF=3 و نرسمه و نستمر مع إهمال كل حرف يمكن أن يشكل لنا حلقة مع غيره من الأحرف التي سبق رسمها، و على سبيل المثال نلغي الحرف CE= 3+3ε لأنه يشكل لنا حلقة مع ما سبقه من الأحرف، كما نلغي الأحرف AB, ED, AG, Df, BE, DC، لنفس السبب، و تكون الشجرة ذات القيمة الدنيا على نحو الشكل التالي:



شكل11-5

بعد أن أنهينا الرسم نكون بذلك قد حصلنا على شجرة عدد أحرفها يساوي عدد القيم منقوصا منه واحد، أي N-1، وبتكلفة دنيا قيمتها تساوي مجموع حمولات الأحرف، أي:

$$Z=3+2+3+2\varepsilon+3+\varepsilon+4+3+4\varepsilon=18+8\varepsilon$$

بإهمال ε نجد:

$$Z=18$$

أي أن تكلفة الإنجاز الدنيا هي 18 ألف دينار.

و يلاحظ أن كل القمم متصلة بالأحرف، أي أن جميع القرى تكون متصلة بخطوط الكهرباء، فأين ما وضع جهاز التموين بالكهرباء فإن الكهرباء تصل الى كل القرى.

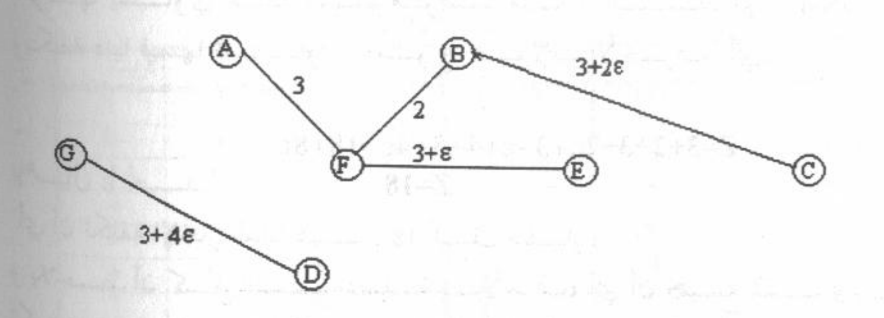
ب-الحل باستخدام خوارزمية سولان: بعد أن نمايز بين الأحرف نفحص قمة بعد قمة و في كل حالة نختار أقل حرف دون إعادة أخذ الحرف الذي تم اختياره من قبل، كما هو واضح في الجدول التالي:

جدول الإختيار

القمة	الحرف المختار
في القمة A	نختار AF=3
في القمة B	نختار BF=2
في القمة C	نختار BC=3+2ε
في القمة D	نختار DG=3+4ε
في القمة E	نختار EF=3+ε
في القمة F	تم الاختيار
في القمة G	تم الاختيار

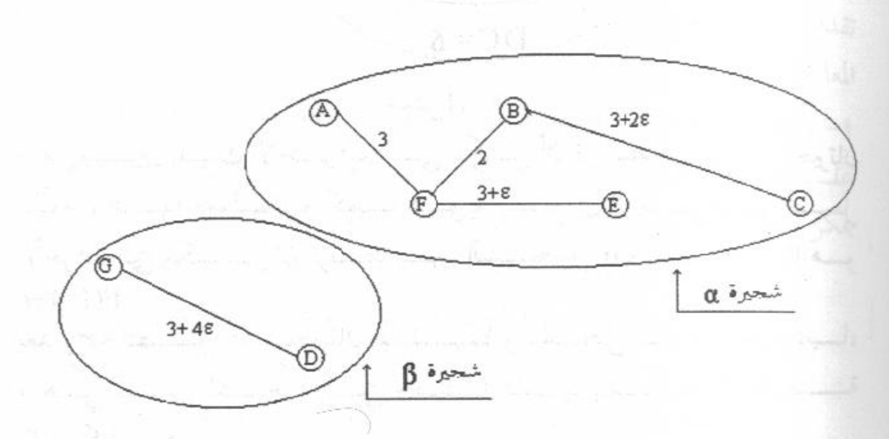
جدول11-3

نرسم الأحرف المختارة كما هي في الشكل التالي:



شكل11-6

لاحظ أننا حصلنا على شجيرتان الأولى تتكون من 5 قمم وأربعة أحرف و الثانية من قمتين و حرف واحد، و بما أن الهدف هو إيجاد شجرة دنيا، لذلك لابد من الربط بين الشجيرتان بالحرف ذي الأقل حمولة، لأجل ذلك نسمي الشجيرة الأولى α و نسمي الشجيرة الثانية β، كما يظهر في الشكل التالي:



شكل11-7

ثم نقوم بفحص الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجيرتان كما هو واضح في الشكل11-8.

AG= 5

FG= 4+ε

Df= 5+ε

شجيرة β   شجيرة α

ED= 4+2ε

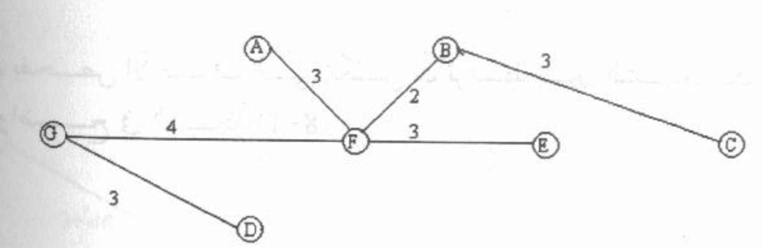
DC=6

شكل11-8

و من بين تلك الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجيرتان نأخذ أقلها حمولة، و كما هو واضح في الرسم فإن أقل الأحرف التي يمكن ان تربط بين الشجيرة α و الشجيرة β هو FG=4+ε

بعد رسمه تتصل الشجيرتان ببعضهما و تشكل لنا شجرة دنيا، و هي نفس الشجرة التي حصلنا عليها باستعمال طريقة كريسكال و هي:

شكل11-9



و لاحظ أنه بعد رسم الشجرة تم إلغاء ε و مضاعفاتها التي تمت الإستعانة بها.
و بجمع حمولات أحرف الشجرة المثلى المحصل عليها نجد أيضا أن أدنى تكلفة إنجاز هي: **Z=18** ألف دينار.

خامسا: حالة الشجرة العظمى: قد تكون الإشكالية المطروحة أحيانا هي إيجاد أطول شجرة للربط بين مجموعة من القمم، وعمليا يمكن أن نصادف بعض المسائل التي تعطى فيها الأرباح أو العوائد التي يمكن أن تجنى عند الربط بين مجموعة من المناطق، و يكون الهدف هو إيجاد الشجرة التي تعطي أعلى الأرباح أو أعلى العوائد.

و لحل مثل هذه المسائل فإنه يمكن الإستعانة بنفس المبدأ الذي تقدمه خوارزمية كريسكال و خوارزمية سولان، إنما في الإتجاه المعاكس، و ذلك كما يلي:

1- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ كريسكال: إعتمادا على مبدأ كريسكال المستخدم في إيجاد الشجرة الدنيا، فإنه يمكن إعطاء الخوارزمية التالية في إيجاد أعظم شجرة:

أ- نرتب الأحرف تنازليا حسب حمولتها.

ب- نأخذ الأحرف الأكبر قيمة تنازليا و نرسمها، مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دارة) مع الأحرف التي سبق رسمها.

ج- نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها هو N-1.

و لحساب الحمولة العظمى التي تعكس أعظم ربح أو أعظم عائد، نجمع حمولة الأحرف التي شكلت لنا شجرة.

ملاحظة: في حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نمايز بينها بإضافة الى بعضها قيمة صغيرة ε ، 2ε...

2- البحث عن أعظم شجرة بمبدأ سولان : إعتمادا على مبدأ سولان فإنه يمكن اتباع الخطوات التالية لإيجاد أعظم شجرة:

أ- نمايز بين الأحرف التي لها نفس الحمولة (القيم)، بإضافة ε ، 2ε...

ب- نأخذ أية قمة و نفحص الأحرف التي تتصل بها و نأخذ أكبرها و نرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقيه.

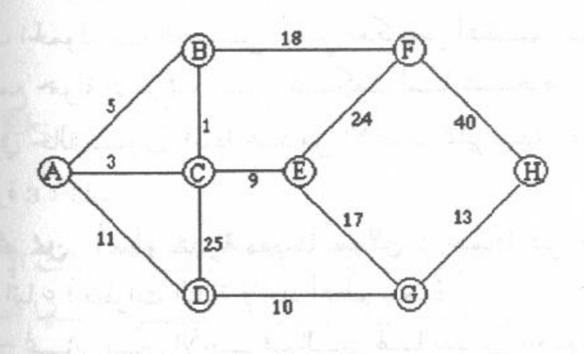
ج- نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق و أن فحصت.

د- عند فحص جميع القمم و تكون النتيجة المحصلة هي شجرة تتصل بها جميع القمم، نكون حينئذ أمام الحل الأمثل،

هـ-أما إذا فحصت جميع القمم لكننا حصلنا على عدد من الشجيرات (أي الفروع) فإن الحل الأمثل لم نصل اليه بعد، و عليه نبحث عن أكبرالأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل في النهاية على شجرة بقيمة عظمى.

نجمع في النهاية حمولة الأحرف التي تشكل الشجرة فنحصل على الربح أو العائد الأعظم.

مثال11-3: تريد مديرية الأشغال العمومية الربط بين مجموعة من الأحياء السكنية بكابل خاص بالأنترنات، الدراسة الأولية بينت إمكانية الربط بين مختلف الأحياء و الأرباح التي يمكن أن تجنيها المؤسسة التي أوكلت اليها مهمة الإنجاز بين كل حي و آخر، و ذلك كما في الشكل التالي:



شكل11-10

الأرباح بملايين الدينارات.

المطلوب إيجاد الخطة التي يمكن بفضلها أن توصل الشركة الأنترنات لكل حي والتي تسمح لها بجني أعلى الأرباح.

أ- باستخدام مبدأ كروسكال:

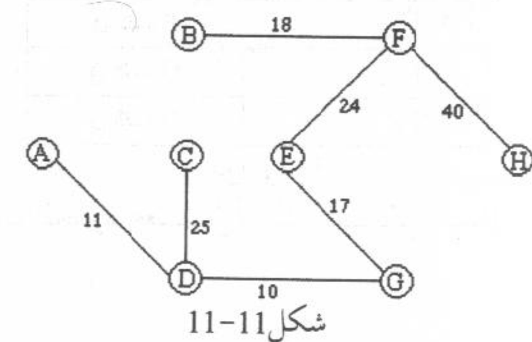
نرتب الأحرف تنازليا حسب حمولتها دون تكرار، كما يلي:

جدول الترتيب

الترتيب	الحرف	الحمولة
1	FH=	40
2	CD=	25
3	EF=	24
4	BF=	18
5	EG=	17
6	GH=	13
7	AD=	11
8	DG=	10
9	CE=	9
10	AB=	5
11	AC=	3
12	BC=	1

جدول11-4

نبدأ برسم الأحرف الأكبر فالتي تلي مع تجنب تشكيل حلقة، فنحصل على الشكل التالي:



شكل11-11

لاحظ أننا تجاوزنا رسم الحرف GH=17 لأنه يشكل لنا حلقة، و توقفنا عند رسم DG=10 لأن كل القمم تكون عندئذ متصلة، و رسم أي حرف بعد ذلك يجعلنا نشكل حلقة.

و نكـــون بذلـــك قـــد حصلنـــا علـــى شـــجرة ، و تكـــون الأربـــاح الأعظمية المحصل عليها عنـــد تنفيـــذ المشـــروع هـــي مجمـــوع الأربـــاح المحصلة عند كل ربـــط بـــين حيـــين، أي:

$$Z=18+40+24+17+10+25+11=145$$

فأعظم ربح يمكن الحصول عليـــه هـــو إذن 145 مليـــون دينـــار.

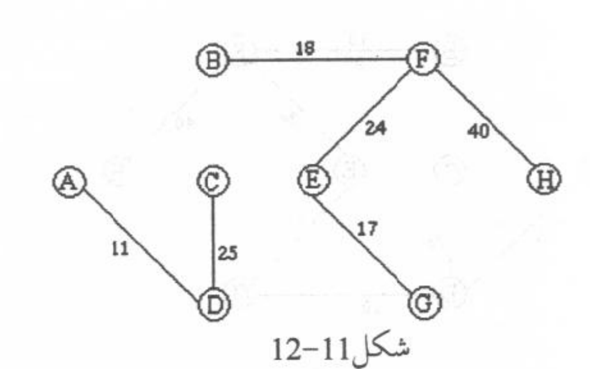
ب- باستخدام مبدأ ســولان: نفحـــص قمـــة بعـــد قمـــة و في كـــل حالة نختار أكبر حـــرف دون إعـــادة أخـــذ الحـــرف الـــذي تم اختيـــاره من قبل، كما هو واضـــح في الجـــدول التـــالي:

جدول الإختيار

القمة	الحرف المختار
في القمة A	AD=11 نختار
في القمة B	BF=18 نختار
في القمة C	CD=25 نختار
في القمة D	تم الإختيار
في القمة E	EF=24 نختار
في القمة F	FH=40 نختار
في القمة G	تم الاختيار
في القمة H	تم الاختيار

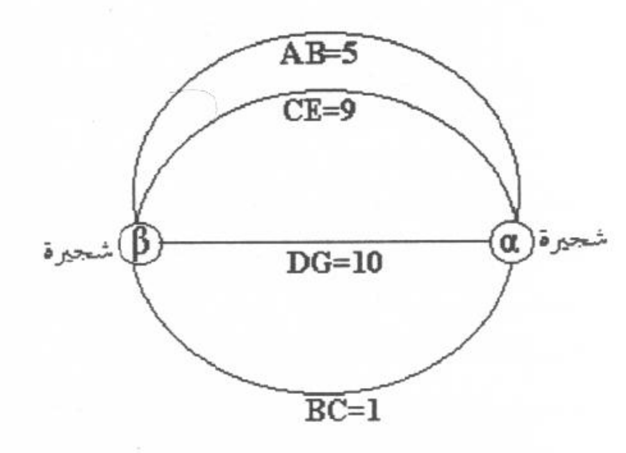
جدول11-5

بعد رسم الأحرف المختارة نحصـــل علـــى الشـــكل التـــالي:



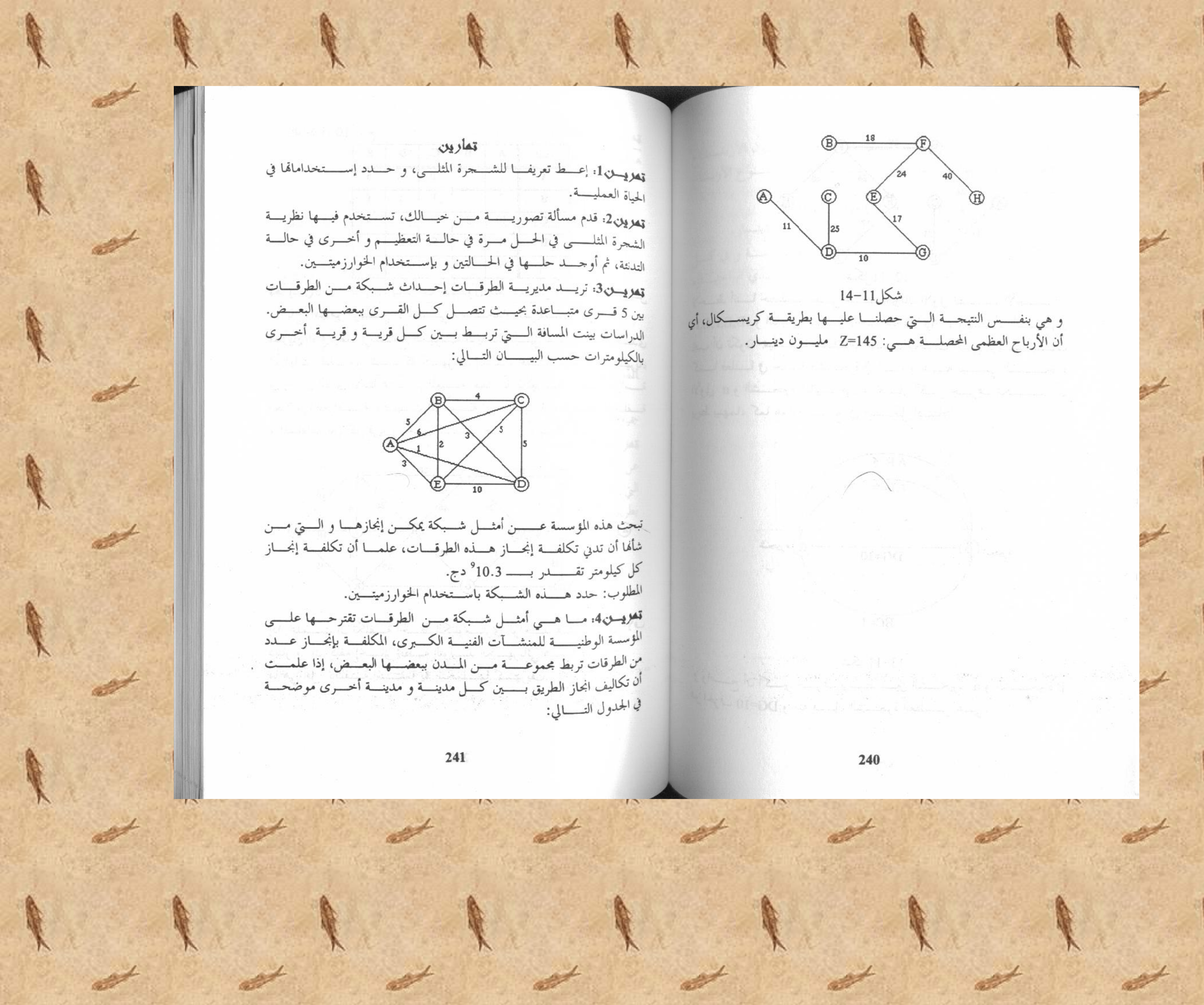
شكل11-12

لاحـــظ أننـــا حصلنـــا علـــى شـــجيرتان الأولى تضـــم الأحـــرف B,E,F,G,H، و الثانيـــة تضـــم الأحـــرف A,C,D ، و بمـــا أن القـــرى يجب أن تكون جميعـــها متصلـــة، لذلـــك نبحـــث عـــن الربـــط بينـــهما كمـــا فعلنـــا في حالـــة الشـــجرة الدنيـــا، و عليـــه نســـمي الشـــجيرة الأولى α و الشـــجيرة الثانيـــة β ، و نختـــار أكـــبر حـــرف يمكـــن أن يربط بينهما، كما هو واضـــح في الشـــكل أدنـــاه:



شكل11-13

و واضـــح أن أكـــبر حـــرف يربـــط بـــين الشـــجيرة α و الشـــجيرة β هو الحرف DG=10 و منه فـــإن الشـــجرة العظمـــى هـــي:



شكل 11-14

و هي بنفـــس النتيجـة الــتي حصلنــا عليــها بطريقــة كريســكال، أي أن الأرباح العظمى المحصلــة هــي: $Z=145$ مليــون دينــار.

تمارين

تمريـــن1: إعـــط تعريفـــا للشـــجرة المثلـــى، و حـــدد إســـتخداماتها في الحياة العمليـــة.

تمرين2: قدم مسألة تصوريـــة مـــن خيـــالك، تســـتخدم فيـــها نظريـــة الشجرة المثلـــى في الحـــل مـــرة في حالـــة التعظيـــم و أخـــرى في حالـــة التدنئة، ثم أوجـــد حلـــها في الحـــالتين و بإســـتخدام الخوارزميتـــين.

تمريـــن3: تريـــد مديريـــة الطرقـــات إحـــداث شـــبكة مـــن الطرقـــات بين 5 قـــرى متباعـــدة بحيـــث تتصـــل كـــل القـــرى ببعضـــها البعـــض. الدراسات بينت المسافة الـــتي تربـــط بـــين كـــل قريـــة و قريـــة أخـــرى بالكيلومترات حسب البيـــان التـــالي:

تبحث هذه المؤسسة عـــن أمثـــل شـــبكة يمكـــن إنجازهـــا و الـــتي مـــن شأنها أن تدني تكلفـــة إنجـــاز هـــذه الطرقـــات، علمـــا أن تكلفـــة إنجـــاز كل كيلومتر تقـــدر بـــــ 10.3^{9} دج.

المطلوب: حدد هـــذه الشـــبكة باســـتخدام الخوارزميتـــين.

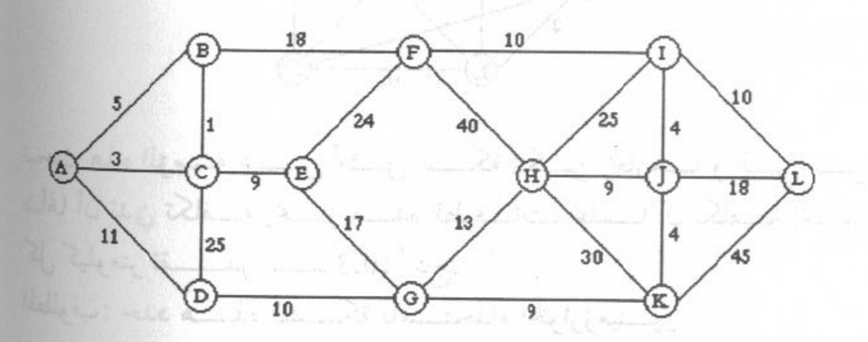
تمريـــن4: مـــا هـــي أمثـــل شـــبكة مـــن الطرقـــات تقترحـــها علـــى المؤسسة الوطنيـــة للمنشـــآت الفنيـــة الكـــبرى، المكلفـــة بإنجـــاز عـــدد من الطرقات تربط مجموعـــة مـــن المـــدن ببعضـــها البعـــض، إذا علمـــت أن تكاليف انجاز الطريق بـــين كـــل مدينـــة و مدينـــة أخـــرى موضحـــة في الجـــدول التـــالي:

الوحدة: 10^9 دج.

المدن	A	B	C	D	E
A	_	7	10	4	6
B	7	_	3	2	1
C	10	3	_	5	3
D	4	2	5	_	1
E	6	1	3	1	_

تمرين5: إذا كانت بيانات جدول التمرين 4 تعبر عن الأرباح، فماهو الربح الأعظمي باستخدام الطريقتين.

تمرين6: في إطار برنامج الكهربة الريفية التي تقوم بها إحدى الولايات، طلب من شركة كهريف إنشاء محطة لتوليد الكهرباء في إحدى القرى الإثنتا عشر المعنية بعملية الكهربة . بعد دراسة العراقيل الجغرافية توصلت المؤسسة الى إمكانيات الربط المختلفة و المسافات بين كل قرية و أخرى كما هي في البيان التالي:



إذا علمت ان تكلفة الخط الكيلومتري الواحد هي 10 آلاف دينار و ان كلفة إنجاز محطة التوليد الكهربائي هي: 10^9 دج.
ما هي أقل تكلفة إستثمارية تتحملها كهريف.

تمرين7: يظهر الجدول التالي تكاليف إنجاز شبكة خطوط هاتفية بين مجموعة من الأحياء الكبرى بالعاصمة:

	حي الوئام	حي السلام	حي الفلاح	حي الأستاذ	حي التفاح	حي النجاح	حي النور
حي النور	9	10	11	3	8	8	-
حي النجاح	4	-	12	7	4	-	8
حي التفاح	6	7	9	-	-	4	8
حي الأستاذ	-	9	13	-	-	7	3
حي الفلاح	8	9	-	13	9	12	11
حي السلام	5	-	9	9	7	-	10
حي الوئام	-	5	8	-	6	4	9

المطلوب: أ- إرسم البيان الموافق للجدول .
ب- أوجد أمثل شبكة يمكن أن تربط بين جميع الأحياء بطريقتي كريسكال و سولان.

تمرين8: بإعتبار أن الأرقام الواردة في جدول المثال 7 عبارة عن الأرباح التي تحصل عليها الشركة المنجزة، فماهي الشبكة التي تقترحها و التي تجعل الأرباح في أعظم قيمة لها. أوجد الحل بطريقتي كريسكال و سولان.



الفصل الثاني عشر
نظرية المسارات المثلى.

كثيرا ما تصادف الاقتصادي مسائل عملية جوهرها هو البحث عن أمثل مسار يربط بين نقطتين محددتين من بين مجموعة كبيرة من المسارات ضمن بيان موجه، و ذلك دون اشتراط المرور بجميع القمم.

فإذا كان لدينا البيان الموجه $G(X,U)$ حيث أن كل قوس u يحمل قيمة هي $c(u) \geq 0$، فإن هدف النظرية هو البحث عن أقصر أو أطول مسار ينطلق من القمة الإبتدائية للبيان x_0 ليصل الى القمة النهائية للبيان x_n .

أولا : طرح المسألة: تطرح مسائل المسارات المثلى بشكل مشابه للمثال التالي:

مثال12-1: تريد اللجنة العلمية لمعهد العلوم الاقتصادية و علوم التسيير تنظيم رحلة علمية الى جامعة قسنطينة عن طريق البر. أعضاء لجنة ترتيبات الرحلة اقترحوا عددا من المسالك التي يمكن اتخاذها انطلاقا من مدينة الشلف A الى مدينة قسنطينة F.

المسالك الرئيسية و المدن الممكن المرور بها و المسافات بين المدن يوضحها البيان التالي:

شكل12-1

من بين المسالك الممكنة المقترحة يريد رئيس **اللجنة تحديد أقصر طريق** يمكن المرور به مع **تحديد قيمة المسافة الدنيا** التي ينبغي قطعها و المدن التي يتم المرور عبرها للوصول الى قسنطينة.

على هذا النحو تطرح مسائل المسارات المثلى.

و هي مسائل شائعة و كثيرة المصادفة خاصة في النقل البري و البحري والجوي و الإمداد عن طريق القنوات أو الخطوط كالكهرباء و الغاز والهاتف...الخ.

و يلاحظ أن الأمر هنا يختلف عن نظرية الشجرة المثلى، ففي الشجرة المثلى يشترط دخول جميع القمم في الحل الأمثل، كما أن الوصل بين كل قمة و أخرى عبارة عن حرف، أي يمكن أن يأخذ في الاتجاهين، بينما في نظرية المسارات المثلى، فلا يشترط المرور بجميع القمم، بل يشترط إيجاد أقصر مسار يربط بين القمة الإبتدائية للبيان و قمته النهائية، و أن الربط بين القمم يتم عن طريق أسهم (أقواس) و ليس عن طريق الأحرف، أي أنها تأخذ في اتجاه واحد فقط و ليس في اتجاهين، و يترتب على هذا أن مصفوفة السعة للبيان لاتكون متناظرة كما هو الحال في الشجرة المثلى، و تُظهر ذلك مصفوفة البيان الوارد في المثال السابق و هي:

مصفوفة السعة للبيان 12-1

القمم	A	B	C	D	E	F
A	-	90	240	180	-	-
B	-	-	-	60	180	-
C	-	-	-	-	30	-
D	-	-	60	-	-	210
E	-	-	-	-	-	60
F	-	-	-	-	-	-

جدول12-1

و كما سبقت الإشارة فإن نظرية المسارات المثلى لا تستخدم فقط في إيجاد أقصر مسار بين نقطتين، لكنها يمكن أن تستخدم أيضا و لو في حالات نادرة في البحث عن أطول مسار بين قمتين.

ثانيا: حل مسائل المسارات المثلى: لحل مسائل المسارات المثلى يتم استخدام خوارزمية **تسمى بخوارزمية فورد**، كما سوف نتطرق الى طريقة أخرى تعتمد على فحص جميع المسارات و و سنطلق عليها **اسم طريقة الفحص التتابعي.**

1- طريقة فورد: و فيها تستخدم خوارزمية تسمى بخوارزمية فورد نسبة الى أول من استعملها، و سيتم استخدامها سواء في حالة البحث عن أقصر مسار أو عن أطول مسار.

أ- البحث عن أقصر مسار:لأجل ذلك نتبع الخطوات التالية:

1- نعيد تسمية قمم البيان على النحو التالي:

قمة الإنطلاق نسميها x_0 .

القمة الموالية x_1 ، و هكذا حتى قمة الوصول أي قمة النهاية تكون x_{n-1} ، حيث أن العدد الكلي للقمم هو n.

2- بجانب القمة x_0 نضع $\lambda_0=0$ ، بجانب بقية القمم x_i حيث $i\neq0$ نضع القيمة $\lambda_i=\infty$

3- نفترض أن $c(x_i , x_j)$ هي حمولة (قيمة) القوس (x_i , x_j)

مرحلة الذهاب:

4- في كل قمة x_j تكون فيها:

$$(\lambda_j- \lambda_i)> c(x_i , x_j)$$

نعوض λ_j بالقيمة: $\lambda_I + c(x_i , x_j)$

5- نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j.

مرحلة الإيـــاب:

6- نبدأ مـــن قمـة الوصـول x_{n-1} و نطـرح مـن القيمـة λ_{n-1} قيمـة λ_p الموجـودة في الأطـراف الإبتدائيـة للأقـواس الـتي تصـل الى x_{n-1}، و نأخذ القوس الذي تكـون فيـه:

$$(\lambda_{n-1}-\lambda_p) = c(x_i , x_j)$$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس الـتي يمكـن أن تشـكل لنا أقصر مسار، و نقوم برسمه علـى **البيـان بخـط مـزدوج** لتمييزه عن غيره من الأقـواس.

ثم ننتقل الى القمة x_{n-2} و نقـوم بنفس الخطوات حتى ننتهي من فحص جميع الأقواس، و حينـها يتحـدد لنـا المسار المطلـوب الـذي يعرض على النحـو:

$$u=(x_1 , x_2,......x_{n-1})$$

و بعد الإنتهاء نسـتبين الخطـوط المزدوجـة الـتي تشكل لنـا المسار الموصل الى القمـة النهائيـة.

مثال12-2: أوجد حـل لإشكالية المثـال12-1

1- نعيد تسمية قمـم البيـان، حيـث نضـع مكـان A أي مدخل البيـان X_0 و مكـان F أي مخـرج البيـان X_5 و نعيـد تسمية بقية القمم كمـا في الشـكل 12-2.

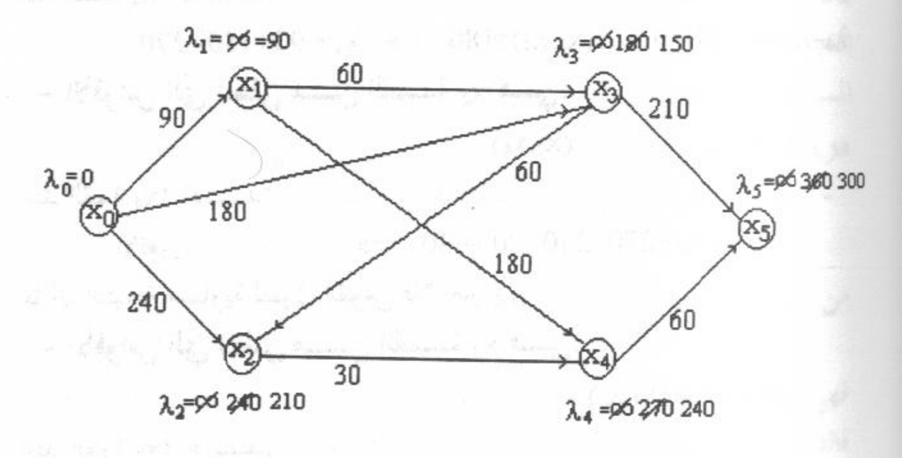
2- نضـع $\lambda_0=0$ و $\lambda_i=\infty$ حيـث: i=1,2,3,4,5

و هذا كما في الشـكل التـالي:

λ1=∞ λ3=∞ λ0=0 λ5=∞ λ2=∞ λ4=∞
x0 x1 x2 x3 x4 x5
60 90 210 60 180 180 240 60 30

شكل12-2

3-نتفحص الأقواس التي تنطلق مـن قمـة كمـا يلـي:



شكل12-3

- الأقواس التي تنطلق مــن القمـة x_0 هــي:

(x_0,x_3) ،(x_0,x_2) ، (x_0,x_1)

عند القمة x_1 نجد:

$$\lambda_1-\lambda_0=\infty-0=\infty > c(x_0,x_1)=90 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1= \lambda_0+90=0+90=90$$

نستبدل $\lambda_1=\infty$ بالقيمة 90، و نضعها في مكانها على البيان.

عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2-\lambda_0=\infty-0=\infty > c(x_0,x_2)=240 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_0+240=0+240=240$$

نستبدل $\lambda_2=\infty$ بالقيمة 240، و نضعها في مكانها على البيان.

عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3-\lambda_0=\infty-0=\infty > c(x_0,x_3)=180 \Rightarrow \lambda_3=\lambda_0+180=0+180=180$$

نستبدل $\lambda_3=?$ بالقيمة 180، و نضعها في مكانها على البيان.

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_1 هي:

(x_1,x_4) ، (x_1,x_3)

عند القمة x_3: نجد:

$$\lambda_3-\lambda_1=180-90=90 > c(x_1,x_3)=60 \Rightarrow \lambda_3=90+60=150$$

عند القمة x_4: نجد:

$$\lambda_4-\lambda_1=\infty-90=\infty > c(x_1,x_4)=180 \Rightarrow \lambda_4=90+180=270$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

(x_2,x_4)

عند القمة x_4: نجد:

$\lambda_4-\lambda_2=270-240=30=30 \Rightarrow$ لانغير

بما أن النتيجة مساوية لطول القوس فلا نغير λ_4

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_3 هي:

(x_3,x_5) ، (x_3,x_2)

عند القمة x_2: نجد:

$$\lambda_2-\lambda_3=240-150=90 > 60 \Rightarrow \lambda_2=150+60=210$$

في هذه الحالة نجد : $j=2$ و $i=3$ أي $j<i$ لذلك نعود من جديد لفحص الأقواس التي تنطلق من x_2 ثم نعود الى x_3 و نكمل الفحص.

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

(x_2,x_4)

عند القمة x_4 نجد:

$$\lambda_4-\lambda_2=270-210=60 > 30 \Rightarrow \lambda_4=210+30=240$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_3 هي:

(x_3,x_5)

عند القمة x_5: نجد:

$$\lambda_5-\lambda_4=360-240=120 > 60 \Rightarrow \lambda_5=240+60=300$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_5 : لاينطلق أي قوس من هذه القمة، و بالتالي فالقيمة $\lambda_5=300$ هي طول أقصر مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول (القمة الإبتدائية و القمة النهائية).

في مثالنا ربما يمكن بسهولة معرفة الأقواس التي اتبعناها للوصول الى القمة النهائية بمسافة تقدر بـ 300كلم أي أقصر مسافة ممكنة، غير أنه لايمكن ذلك في البيانات المعقدة، لذلك لابد من اتمام الخوارزمية في مرحلتها الثانية و هي مرحلة الإياب لتحديد المسار الذي تم عن طريقه قطع المسافة المذكورة.

مرحلة الإياب: وفيها نتفحص الأقواس التي تصل:

- الأقواس التي تصل الى القمة x_5 هي:

(x_3,x_5) ، (x_4,x_5)

من x_4 نجد:

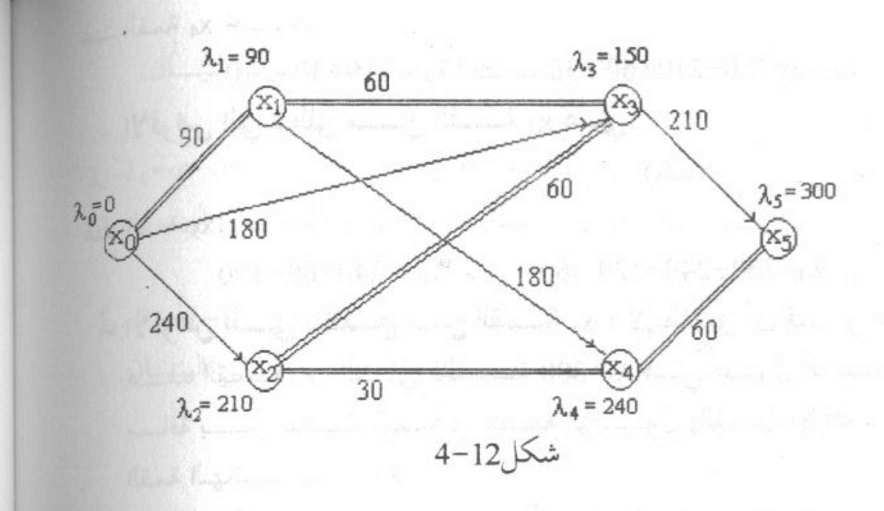
$$\lambda_5-\lambda_4=300-240=60$$

فهي تساوي طول القوس أي: $\lambda_5-\lambda_4=c(x_4, x_5)$

فالقوس (x_4, x_5) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_4, x_5) \in U$$

و نميزه بخط مزدوج كما يظهر في الشكل12-4



شكل4-12

من x_3 نجـــد:

$$\lambda_5-\lambda_3=300-150=150 \neq 210$$

فهي لا تساوي طول القوس أي:

$$\lambda_5-\lambda_3 \neq c(x_3 , x_5)$$

فالقوس (x_3 , x_5) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_4 , x_5) \notin U$$

- الأقواس التي تصـــل الى القمـــة x_4 هـــي:

(x_2,x_4) ، (x_1,x_4)

من x_1 نجـــد:

$$\lambda_4-\lambda_1=240-90=150 \; ?180$$

فهي لا تساوي طول القوس أي: $\lambda_4-\lambda_1 \neq c(x_1 , x_4)$

فالقوس (x_1 , x_4) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_1 , x_4) \notin U$$

من x_2 نجـــد:

$$\lambda_4-\lambda_2=240-210=30=c(x_2 , x_4)$$

فالقوس (x_2 , x_4) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_2 , x_4) \in U$$

- الأقواس التي تصـــل الى القمـــة x_3 هـــي:

(x_0,x_3) ، (x_1,x_3)

من x_1 نجـــد:

$$\lambda_3-\lambda_1=150-90=60$$

فهي تساوي طول القوس أي: $\lambda_3-\lambda_1 = c(x_1 , x_3)$

فالقوس (x_1 , x_3) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_1 , x_3) \in U$$

من x_0 نجـــد:

$$\lambda_3-\lambda_0=150-0=150$$

فهي لا تساوي طول القوس أي: $\lambda_3-\lambda_0 \neq c(x_3 , x_0)$

فالقوس (x_3 , x_0) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_3 , x_0) \notin U$$

- الأقواس التي تصـــل الى القمـــة x_2 هـــي:

(x_0,x_2) ، (x_3,x_2)

من x_3 نجـــد:

$$\lambda_2-\lambda_3=210-150=60$$

فهي تساوي طول القوس أي: $\lambda_2-\lambda_3 = c(x_3 , x_2)$

فالقوس (x_3 , x_2) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_3 , x_2) \in U$$

من x_0 نجـــد:

$$\lambda_2-\lambda_0=210-0=210$$

فهي لا تساوي طول القوس أي: $\lambda_2-\lambda_0 \neq c(x_0 , x_2)$

فالقوس (x_0 , x_2) لا ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

$$(x_0 , x_2) \notin U$$

- الأقواس التي تصـــل الى القمـــة x_1 هـــي:

(x_0,x_1)

من x_0 نجـــد:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 90 - 0 = 90$$

فهي تساوي طول القوس أي:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = c(x_0 , x_1)$$

فالقوس (x_0 , x_1) ينتمي الى المسار الأقصر U ، و نكتب ذلك كما يلي:

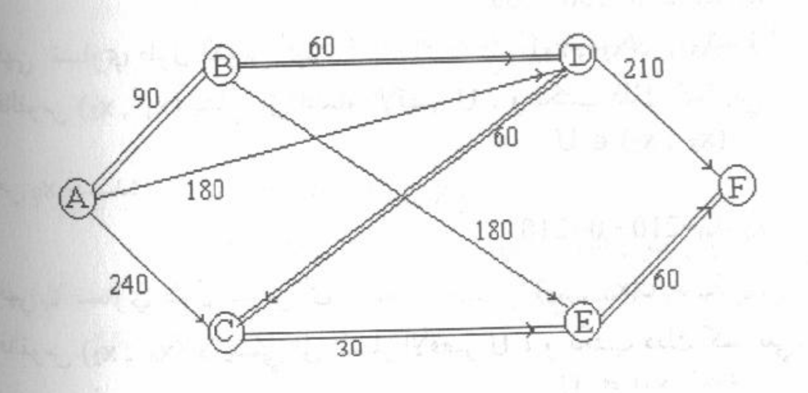
$$(x_0 , x_1) \in U$$

- **الأقــواس الــتي تصــــل الى القمــــة** x_0 : لا يوجـــد أي قوس، وبالتالي نكون قد فحصنا الأقواس الــتي تصــل أيــة قمــة.

و نكون بذلك قد حددنا المســـار الأصغــر الــذي يمكــن المــرور عليــه لأجــل الوصــول الى نقطــة النهايــة (قســنطينة في مثالنــا)، و هــــذا المسار هــو:

$$U = [(x_0 , x_1) , (x_1 , x_3) , (x_3 , x_2) , (x_2 , x_4) , (x_4 , x_5)]$$

نميز هـــذا المســـار بخطــوط مزدوجــة و نعيــد الشــكل الى أصلــه كما يظهـــر في الشـــكل12-5.



شكل12-5

حيث يجــب المــرور انطلاقــا مــن المدينــة A بــالمدن B ، D ، C ، E و أخــيرا F.

ب- البحث عن أطول مسار: للبحث عن أطول مسار ضمن بيان موجــه و مقيم نعتمد على نفس مبدأ خوارزمية فورد كما تم التطرق إليها في حالة التدنئة إنما في اتجاه معاكس، وفق الخطوات التالية:

1- نعيد تسمية قمم البيان كمــا فعلنــا في حالــة البحــث عــن أقصــر مسار أي على النحــو التــالي:

قمــة الإنطــلاق نســميها x_0 .

القمة المواليـــة x_1 ، و هكــذا حــتى قمــة الوصــول أي قمــة النهاية تكون x_{n-1} ، حيث أن العـــدد الكلــي للقمـــم هــوn.

2- بجــانب القمـــة x_0 نضـــع $\lambda_0=0$ ، بجــانب بقيــة القمـــم x_i حيـــث $i\neq0$ نضع أيضـــا القيمـــة $\lambda_i=0$

3- نفترض أن $c(x_i , x_j)$ هي حمولة (قيمة) القوس (x_i , x_j).

مرحلة الذهاب:

4- في كل قمة x_j تكـــون فيـــها:

$$(\lambda_j - \lambda_i) < c(x_i , x_j)$$

نعــوض λ_j بالقيمـــة: $\lambda_i + c(x_i , x_j)$

5- نستمر في العملية حتى يســـتحيل تغيـــير أي مـــن λ_j.

مرحلة الإيــاب:

6- نبدأ من قمة الوصول x_{n-1} و نطرح من القيمة λ_{n-1} قيمة λ_p الموجـــودة في الأطراف الإبتدائية للأقواس التي تصل الى x_{n-1}، و نأخذ القوس الذي تكون فيه:

$$(\lambda_{n-1} - \lambda_p) = c(x_i , x_j)$$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس الــتي تشــكل لنــا أطــول مســار، نقوم برسمه على البيان بخط مزدوج لتمييزه عن غيره مـــن الأقــواس.

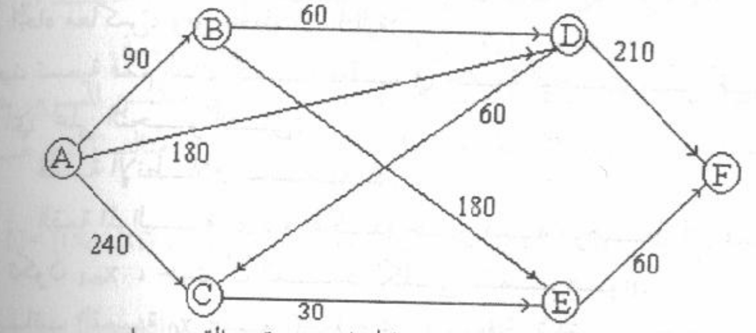
ثم ننتقل الى القمة x_{n-2} و نقوم بنفس الخطوات حتى ننتـــهي مـــن فحــص جميع الأقواس، و حينها يتحدد لنا المسار المطلـــوب الــذي يعــرض علــى النحو:

$$u = (x_1 , x_2, \ldots\ldots x_{n-1})$$

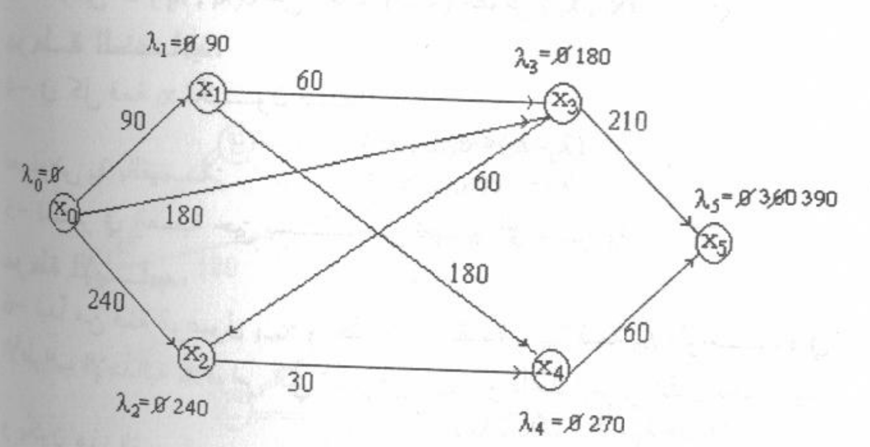
و بعد الإنتهاء نستبين الخطوط المزدوجة التي تشكل لنا أطول مسار موصل الى القمة النهائية.

مثال12-3: أوجد أطول مسار يربط بين المدينةA و المدينة F ، للبيان12-1.

البيان المشار اليه هو :



بتطبيق الجزء الإعدادي من الخوارزمية و القيام بتحويلات الخوارزمية نحصل على الشكل التالي:



شكل12-6

نفحص الأقواس التي تسقط خارجيا و داخليا:

1- الأقواس التي تنطلق: (مرحلة الذهاب):

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_0 هي:

(x_0,x_3) ، (x_0,x_2) ، (x_0,x_1)

عند القمة x_1 نجد:

$$\lambda_1-\lambda_0=0-0=0<90 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_0+90=0+90=90$$

أي نستبدل $\lambda_1=0$ بالقيمة 90.

عند القمة x_2 نجد:

$$\lambda_2-\lambda_0=0-0=0<240 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_0+240=0+240=240$$

عند القمة x_3 نجد:

$$\lambda_3-\lambda_0=0-0=0<180 \Rightarrow \lambda_3=\lambda_0+180=0+180=180$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_1 هي:

(x_1,x_4) ،(x_1,x_3)

عند القمة x_3: نجد:

$\lambda_3-\lambda_1=180-90=90>60 \Rightarrow \lambda_3$ لاتتغير

عند القمة x_4: نجد:

$$\lambda_4-\lambda_1=0-90=-90<180 \Rightarrow \lambda_4=90+180=270$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_2 هي:

(x_2,x_4)

عند القمة x_4 نجد:

$\lambda_4-\lambda_2=270-240=30=30 \Rightarrow$ لانغير

- الأقواس التي تنطلق من القمةx_3 هي:

(x_3,x_5) ، (x_3,x_2)

عند القمة x_2 نجد:

$\lambda_2-\lambda_3=240-180=60=60 \Rightarrow \lambda_2$ لا تتغير

عند القمة x_5 نجد:

$$\lambda_5-\lambda_3=0-180=-180<210 \Rightarrow \lambda_5=180+210=390$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة x_4 هي:

(x_4,x_5)

عند القمة x_5 نجد:

$\lambda_5-\lambda_4=390-270=120 > 30 \Rightarrow \lambda_5$ لا تتغير

- **الأقواس التي تنطلق من القمة** x_5 : لاينطلق أي قوس من هذه القمة، و بالتالي فالقيمة $\lambda_5=390$ هي طول أطول مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول (القمة الإبتدائية و القمة النهائية).

مرحلة الاياب: وفيها نتفحص الأقواس التي تصل:

- **الأقواس التي تصل الى القمة x_5 هي:**

(x_3,x_5) ، (x_4,x_5)

من x_4 نجد:

$$\lambda_5-\lambda_4=390-270=120 \neq 60 \Rightarrow (x4-x5) \notin U$$

فالقوس (x_4 , x_5) لا ينتمي الى المسار الأطول U .

$(x_4 , x_5) \notin U$

من x_3 نجد:

$$\lambda_5-\lambda_3=390-180= 210 = 210 \Rightarrow (x_3,x_5) \in U$$

فالقوس (x_3 , x_5) ينتمي الى المسار الأطول U و نميزه بخط مزدوج.

- **الأقواس التي تصل الى القمة x_4 هي:**

(x_2,x_4) ، (x_1,x_4)

من x_1 نجد:

$$\lambda_4-\lambda_1=270-90= 180 =180$$

فهي تساوي طول القوس أي: $\lambda_4-\lambda_1 = c(x_1 , x_4)$

فالقوس (x_1 , x_4) ينتمي الى المسار الأطول U ، و نكتب ذلك كما يلي:

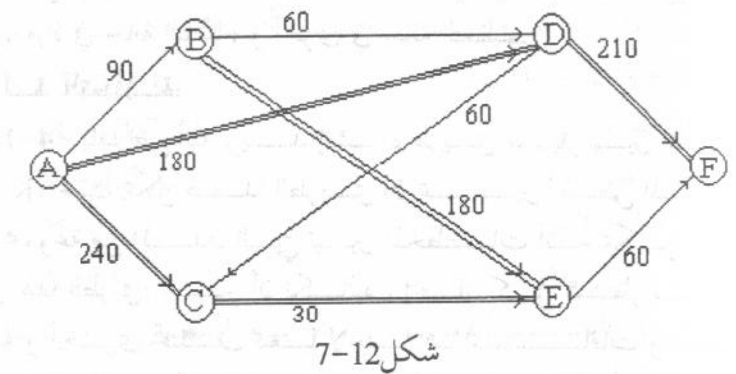
من x_2 نجد:

$$\lambda_4-\lambda_2=270-240=30=c(x_2 , x_4)$$

فالقوس (x_2 , x_4) ينتمي الى المسار الأطول U و نميزه أيضا بخط مزدوج.

و نستمر حتى نفحص كل الأقواس التي تصل، و نرسم الأقواس التي تنتمي الى المسار بخط مزدوج، و يكون أقصر مسار هو

عبارة عن سلسلة الأقواس المزدوجة التي تربط القمة الإبتدائية بالقمة النهائية، كما يظهر في الشكل التالي:



شكل12-7

من الشكل يظهر أن أطول مسار يوصل من القمة الابتدائية الى القمة النهائية هو الذي ينطلق من A و يمر بـ D ويصل أخيرا الى F بمسافة تقدر بـ390 كلم.

لاحظ أننا أهملنا الأقواس AC ، CE و BE لأنها لا توصلنا الى القة F إنطلاقا من القمة A كما يظهر في الشكل12-7 أعلاه.

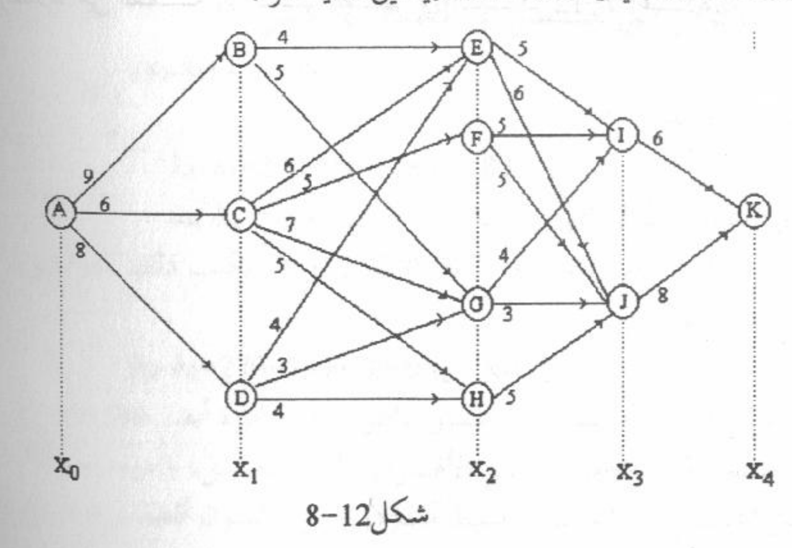
2- **طريقة الفحص التتابعي للمسارات الجزئية:** تقوم هذه الطريقة على أساس فحص المسارات الجزئية المتتالية وإختيار المسار الذي يوصل الى القمة النهائية بأقل أو أكبر قيمة ممكنة حسب الحالة ، و لتوضيح ذلك نعطي المثالين التاليين، مرة في حالة التدنئة، و أخرى في حالة التعظيم.

أ- حالة التدنئة:

مثال12-4 : بافتراض أننا نريد إنشاء طريق سيار بين المدينتين A و K، بحيث يمكن لهذا الطريق أن يمر بين بعض المدن من ضمن مجموعة من المدن التي تبين المخططات أنه يمكن اتخاذها كمعابر لهذا الطريق، غير أن تكاليف إنجاز كل شطر بين كل مدينة و أخرى تختلف تبعا لإختلاف المسافات والطبيعة الجيوفيزيائية، والشكل 12-8 يظهر إمكانيات الربط بين مختلف هذه المدن و التكاليف المتوقعه لإنجاز كل شطر.

إن الهدف هو تحديد المسار الذي ينبغي أن نسلكه لإنجاز الطريق **بأقل تكلفة** ممكنة مع تحديد المدن التي يمر عبرها.

ملاحظة: التكاليف معطاة بملايين الدينارا.



شكل12-8

لتحديد المسار ذي التكلفة الأقل بين المدينتين A,K بطريقة الفحص المتتالي للمسارات الجزئية، فإننا نقوم بتقسيم البيان الى عدة أجزاء يضم كل جزء مجموعة من القمم تشكل مرحلة من المراحل، و ذلك كما هو واضح في البيان أعلاه، حيث جعلنا:

المرحلة الإبتدائية: $X_0=\{A\}$

المرحلة الأولى: $X_1=\{B,C,D\}$

المرحلة الثانية: $X_2=\{E,F,G,H\}$

المرحلة الثالثة: $X_3=\{I,J\}$

المرحلة الرابعة: $X_4=\{K\}$

بناء على هذا التقسيم للقمم يتم تحديد المسارات الجزئية بين القمم و إختيار أصغر مسار في كل مرحلة و ذلك على نحو، الجداول التالية:

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_1=\{B,C,D\}$

X_1	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر	تكلفة المسار الأصغر
B	AB	9	AB	9
C	AC	6	AC	6
D	AD	8	AD	8

جدول12-2

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_2=\{E,F,G,H\}$

نأخذ المسارات الصغرى من الجدول السابق و نربطها بالأقواس الموالية.

X_2	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر المختار	تكلفة المسار الأصغر
E	ABE	13	ACE ADE	12 12
	ACE	12		
	ADE	12		
F	ACF	11	ACF	11
G	ABG	14	ADG	11
	ACG	13		
	ADG	11		
H	ACH	11	ACH	11
	ADH	12		

جدول12-3

بعد هذه المرحلة نفحص المسارات التي تكمل المسارات المثلى في الجدول السابق و التي تصل الى قمم المرحلة الثالثة و نختار أقلها أيضا.

لاحظ أن تكلفة المسار حسبت بجمع تكاليف كل قوس ينتمي الى المسار.

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_3=\{I,J\}$

X_3	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر المختار	تكلفة المسار الأصغر
I	ACEI	17	ADGI	15
	ADEI	17		
	ACFI	16		
	ADGI	15		
j	ACEJ	18	ADGJ	14
	ADEJ	18		
	ACFJ	16		
	ADGJ	14		
	ACHJ	16		

جدول12-4

لاحظ في الجدول أنه لايوجد مسار ACHI لأنه لا يوجد على البيان.

بنفس الطريقة السابقة، نفحص الآن المسارات التي تكمل المسارات الجزئية المختارة و التي توصل الى المرحلة الرابعة و الأخيرة.

إختيار أصغر المسارات الواصلة الى $X_4=\{K\}$

X_4	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر المختار	تكلفة المسار الأصغر
K	ADGIK	21	ADGIK	21
	ADGJK	22		

جدول12-5

بما أنه لاتوجد مرحلة أخرى لذلك فإن المسار ذي التكلفة الدنيا الذي يربط بين القمة A و القمة K هو المسار ADGIK ، حيث تقدر التكلفة الدنيا للربط بـ 21 مليون دينار، و يمر هذا المسار على المدن التالية:

(A) —8→ (D) —3→ (G) —4→ (I) —6→ (K)

شكل12-9

و يلاحظ أن هذا المسار لم يمر على جميع المدن بل على بعضها فقط، و هذا ما يميز مسائل المسارات المثلى على مسائل الشجرة المثلى كما تمت الإشارة الى ذلك في الفصل السابق.

ب- حالة التعظيم: في حالة التعظيم يمكن أيضا إستخدام طريقة الفحص التتابعي بطريقة مشابهة لحالة التدنئة، و الفارق فقط هو في إختيار المسار الأمثل، فبدل ما نختار المسار الأصغر نختار المسار الأكبر، و فق منهجية المثال التالي:

مثال12-5: بالإعتماد على بيان المثال السابق، و بافتراض أن حمولة الأقواس عبارة عن العوائد التي يمكن أن نجنيها سنويا بملايين الدينارات، و أن الهدف هو البحث عن المسار الأمثل الذي يجعلنا نحصل على أعلى العوائد، فإننا في هذه الحالة أيضا نطبق نفس الطريقة السابقة، و الإختلاف فقط هو في إختيار المسارات الجزئية إذ يتم هنا إختيار أكبرها و ليس أصغرها، وذلك كما يلي:

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_1=\{B,C,D\}$

X_1	المسارات الممكنة	عائد المسار	المسار الأكبر	العائد الأكبر
B	AB	9	AB	9
C	AC	6	AC.	6
D	AD	8	AD	8

جدول12-6

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_2=\{E,F,G,H\}$

X_2	المسارات الممكنة	عائد المسار	المسار الأكبر المختار	العائد الأكبر
E	ABE	13	ABE	13
	ACE	12		
	ADE	12		
F	ACF	11	ACF	11
G	ABG	14	ABG	14
	ACG	13		
	ADG	11		
H	ACH	11	ADH	12
	ADH	12		

جدول12-7

بعد هذه المرحلة نفحص المسارات التي تكمل المسارات المثلى في الجدول السابق و التي تصل الى قمم المرحلة الثالثة و نختار أكبرها أيضا.

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_3=\{I,J\}$

X_3	المسارات الممكنة	عائد المسار	المسار الأكبر المختار	العائد الأكبر
I	ABEI	18	ABEI	18
	ACFI	16	ABGI	18
	ABGI	18		
j	ABEJ	19	ABEJ	19
	ACFJ	16		
	ABGJ	17		
	ADHJ	17		

جدول12-8

بنفس الطريقة السابقة، نفحص الآن المسارات التي تكمل المسارات الجزئية المختارة و التي توصل الى المرحلة الرابعة و الأخيرة.

إختيار أكبر المسارات الواصلة الى $X_4=\{K\}$

X_4	المسارات الممكنة	العائد	المسار الأكبر المختار	العائد الأكبر
K	ABEIK	24	ABEJK	27
	ABGIK	24		
	ABEJK	27		

جدول12-9

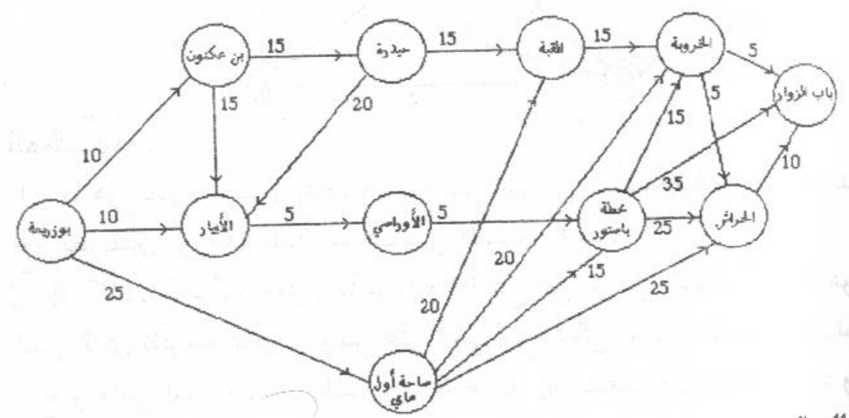
بما أنه لاتوجد مرحلة أخرى لذلك فإن المسار ذو العائد الأعلى و الذي يربط بين القمة A و القمة K هو ABEJK و يكون أكبر عائد محصل عليه هو 27 مليون دينار، و يتم المرور عبر المدن الواضحة في الشكل أدناه:

A —9→ B —4→ E —6→ J —8→ K

شكل12-10

تمارين.

تمرين 1 : تريد شركة النقل الحضري لمدينة الجزائر إحداث خط نقل بالحافلات بين ملحقة جامعة الجزائر ببوزريعة وجامعة باب الزوار، مع اشتراط قطع المسافة بينهما في أقصر وقت ممكن.
مخطط شبكات الخطوط بالشركة إشترط أيضا المرور على الأقل ببعض مراكز التجمع الطلابي في مختلف المعاهد و الأحياء الجامعية.
الشبكة الممكن أن يقترح خلالها الخط و كذا الوقت المستغرق بين كل منطقة تجمع طلابي و آخر موضحة في الشكل التالي:



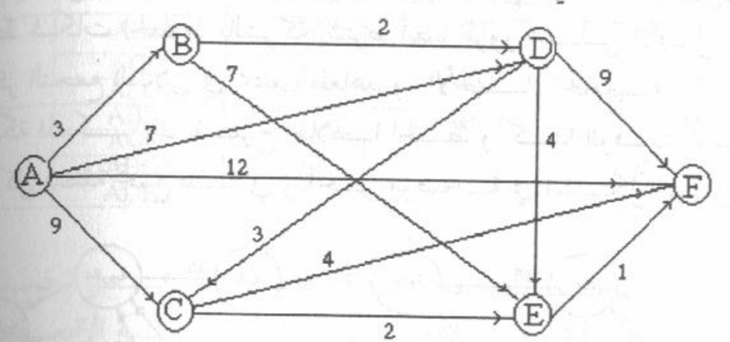
المطلوب:

1- ما هو المسار الذي تقترحه على الشركة و الذي يربط بوزريعة بباب الزوار بأدنى فترة زمنية تقطعها الحافلة باستخدام طريقتي فورد و الفحص التتابعي.

2- حدد مراكز التجمع الطلابي التي يتم إعتبارها محطات رئيسية للحافلات.

3- بافتراض أن حافلات الشركة كانت قبل هذا تسلك المسار ذي الأطول فترة زمنية بين بوزريعة و باب الزوار، حدد هذا المسار و إحسب الفترة الزمنية الأطول، ثم إحسب الفترة المقتصدة بين أطول مسار و أقصره.

تمريـن2: تريـد شـركة نقـل خاصـة بـالتموين بـالمواد الغذائيـة إحداث خط نقـل دائـم لتمويـن المنطقـة F بـالمواد الغذائيـة إنطلاقـا من العاصمـة الاقتصاديـة A ، فـإذا كـانت شـبكة الطـرق الممكـن المرور بها و المسـافة بـين كـل مدينـة و أخـرى بمئـات الكيلومـترات كما في البيان التـالي:



المطلـوب:

1- ما هو أقصر مسـار تتخـذه قوافـل النقـل مسـلكا لهـا ؟ أوجـد الحل بطريقتين، و حدد المدن الممكـن المـرور بهـا.

2- إذا كانت الشركة تحقق ربحا مقداره 10 دج عن كـل كيلومـتر مـاهو المسار الذي تقترحه عليها لتحصل على أعلى ربح ممكن. مـا مقـدار هـذا الربح و ماهي المدن التي يتم المـرور عبرهـا. إسـتخدم طريقـة فـورد و طريقة الفحصص التتابعي لإيجاد الحـل.

تمرين4: رئيس دائـرة يريـد جعـل بعـض القـرى الكثيفـة السـكان التي تنتمي الى دائرتـه مقـرات بلديـة، هـذه القـرى تقـع في منـاطق متبـاعدة و معزولـة عـن بعضـها البعـض، وقـع خـلاف علـى أي القرى تصبـح مقـرات بلديـة، فقـرر ان يلجـأ الى التحكيـم التقـني- الإقتصادي و مفاد هـذا التحكيـم هـو أن إنشـاء أيـة بلديـة مرهـون بأقل تكلفة لانشـاء طريـق ينطلـق مـن مقـر الدائـرة x_0 الى بعض القرى ليصل في النهايـة الى القريـة x_5 الـتي لاخـلاف في جعلـها مقـر

بلدية بحيث أن أية قرية يمر بهـا تكـون مرشـحة. فـإذا كـان الجـدول التالي يوضح مختلف القرى و تكـاليف إنشـاء الطـرق بينـها،

	x_0	x_1	X_2	x_3	x_4	x_5
x_0	_	6	1	10	30	17
x_1	_	_	_	4	60	7
x_2	_	_	_	7	2	_
x_3	_	_	_	_	6	1
x_4	_	_	_	_	_	9
x_5	_	_	_	_	_	_

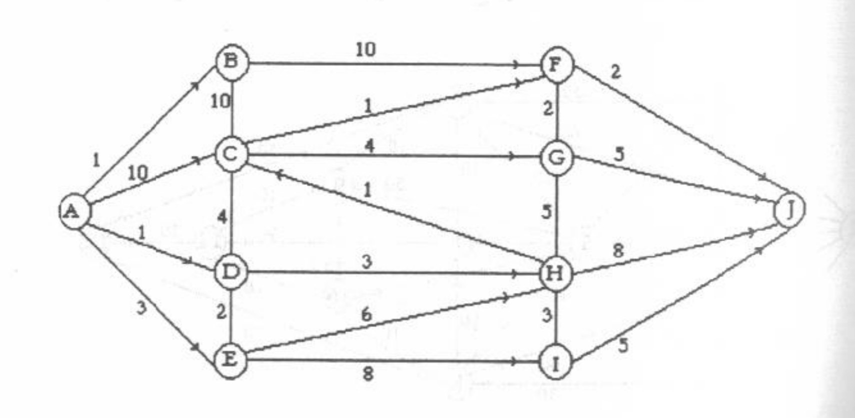
المطلـوب:

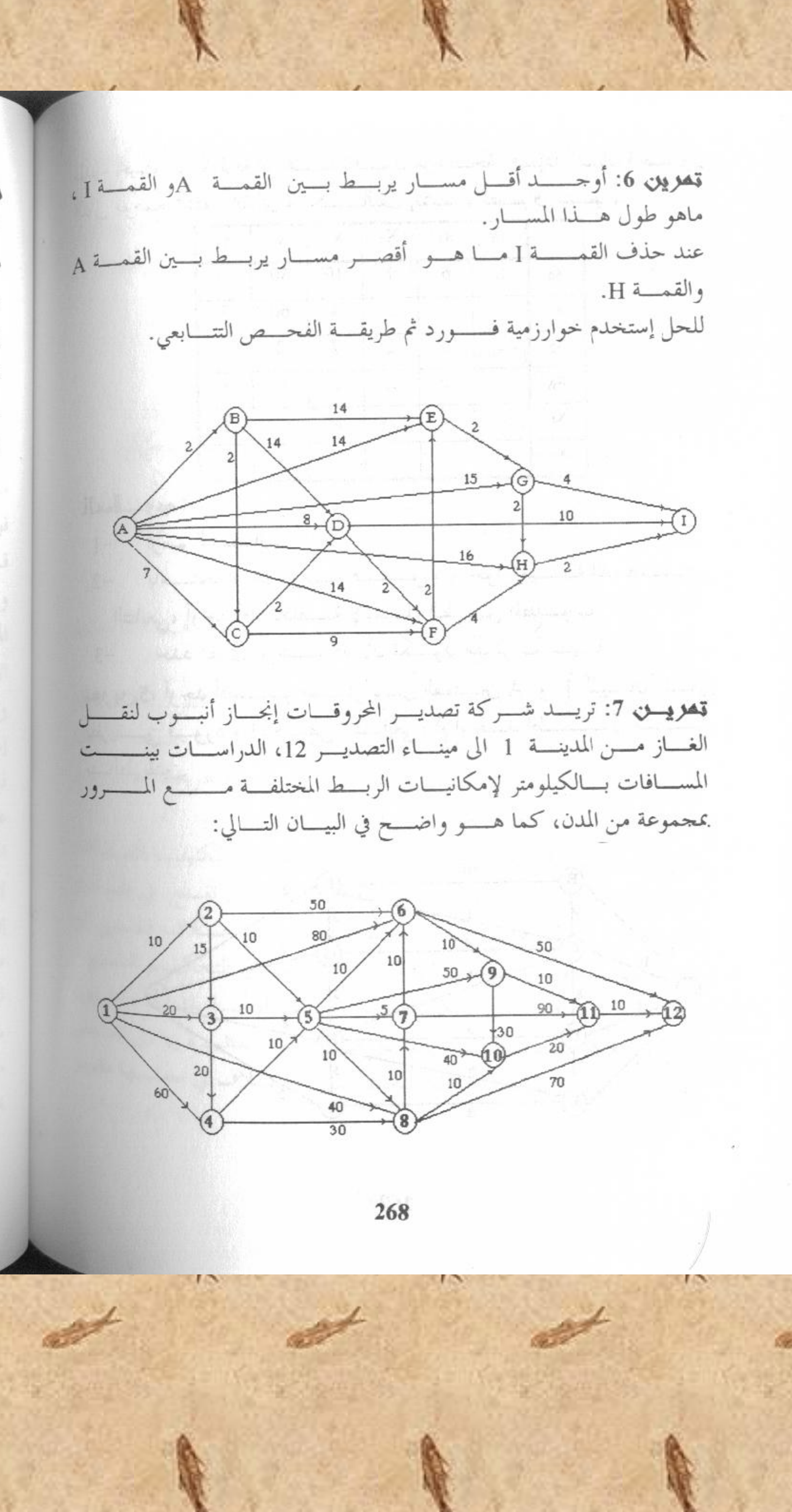
1- ارسم البيـان.

2- باسـتخدام خوارزميـة فـورد و خوارزميـة الفحصـص التتابعي، أوجد أقل تكلفـة لإنشـاء الطريـق المطلـوب.

3- حدد القرى المرشـحة لأن تكـون مقـرات بلديـة.

تمرين5: أوجد أقصـر مسـار بـين القمتـين A و j للبيـان التـالي بطريقـتي فـورد و الفحـص التتـابعي، ثم أوجـد أطـول مسـار بـالطريقتين.





تمرين 6: أوجد أقل مسار يربط بين القمة A و القمة I ، ماهو طول هذا المسار.

عند حذف القمة I ما هو أقصر مسار يربط بين القمة A والقمة H.

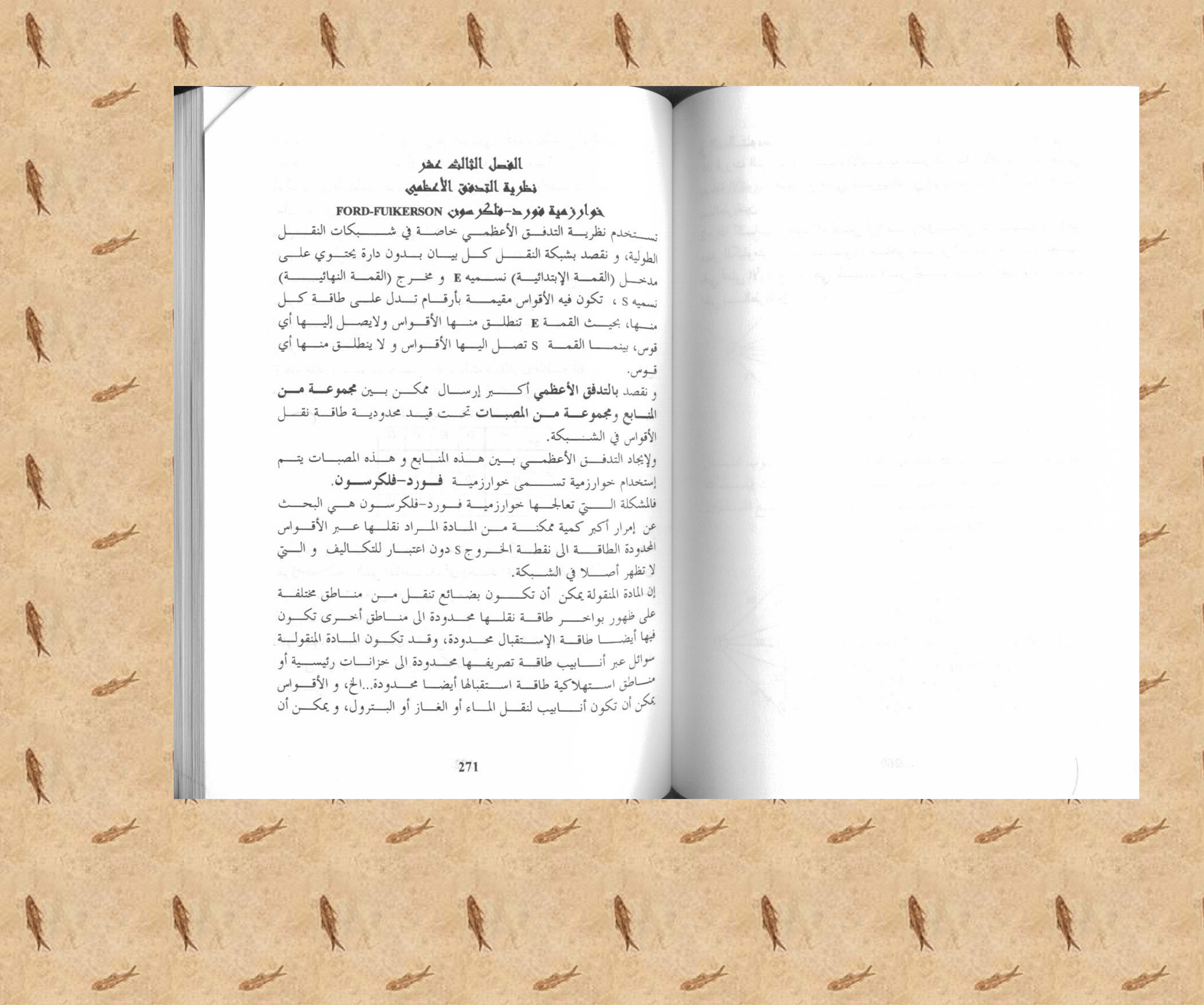
للحل إستخدم خوارزمية فورد ثم طريقة الفحص التتابعي.

تمرين 7: تريد شركة تصدير المحروقات إنجاز أنبوب لنقل الغاز من المدينة 1 الى ميناء التصدير 12، الدراسات بينت المسافات بالكيلومتر لإمكانيات الربط المختلفة مع المرور بمجموعة من المدن، كما هو واضح في البيان التالي:

و المطلوب

اذا قررت الشركة انشاء الأنبوب عبر المسار الأقل. ما هي مسافة الأنبوب حينئذ، و ماهي المدن التي يمر عبرها. أوجد الحل بالطريقتين.

2- إذا كانت الشركة تجني أرباحا إجمالية تقدر بـ 4 آلاف دينار للكيلومتر الواحد سنويا، ماهو المسار الذي تقترحه عليها لجني أعلى الأرباح و ما هي المدن التي يجب المرور عليها. أوجد الحل بالطريقتين.



الفصل الثالث عشر
نظرية التدفق الأعظمي
خوارزمية فورد-فلكرسون FORD-FUIKERSON

تستخدم نظرية التدفق الأعظمي خاصة في شبكات النقل الطولية، و نقصد بشبكة النقل كل بيان بدون دارة يحتوي على مدخل (القمة الإبتدائية) نسميه **E** و مخرج (القمة النهائية) نسميه S ، تكون فيه الأقواس مقيمة بأرقام تدل على طاقة كل منها، بحيث القمة **E** تنطلق منها الأقواس ولايصل إليها أي قوس، بينما القمة S تصل اليها الأقواس و لا ينطلق منها أي قوس.

و نقصد **بالتدفق الأعظمي** أكبر إرسال ممكن بين **مجموعة من المنابع** و**مجموعة من المصبات** تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في الشبكة.

ولإيجاد التدفق الأعظمي بين هذه المنابع و هذه المصبات يتم إستخدام خوارزمية تسمى خوارزمية **فورد-فلكرسون**.

فالمشكلة التي تعالجها خوارزمية فورد-فلكرسون هي البحث عن إمرار أكبر كمية ممكنة من المادة المراد نقلها عبر الأقواس المحدودة الطاقة الى نقطة الخروج S دون اعتبار للتكاليف و التي لا تظهر أصلا في الشبكة.

إن المادة المنقولة يمكن أن تكون بضائع تنقل من مناطق مختلفة على ظهور بواخر طاقة نقلها محدودة الى مناطق أخرى تكون فيها أيضا طاقة الإستقبال محدودة، وقد تكون المادة المنقولة سوائل عبر أنابيب طاقة تصريفها محدودة الى خزانات رئيسية أو مناطق استهلاكية طاقة استقبالها أيضا محدودة...الخ، و الأقواس يمكن أن تكون أنابيب لنقل الماء أو الغاز أو البترول، و يمكن أن

تكون أسلاك ربط كهربائي أو هاتفي، كما يمكن أن تعبر عن حمولة بواخر أو طائرات أو شاحنات أو غير ذلك.

أولا: طرح المسألة: تطرح مسائل التدفق الأعظمي على نحو المثال التالي:

مثال13-1: مؤسسة لديها ثلاثة خزانات رئيسية للمياه هي A, B, C لتموين أربع قرى هي D, E , F, G ، بحيث أن الخزان A يستطيع تصريف 45 لتر/ثا ، والخزان B يستطيع تصريف 25 لتر/ثا، و الخزان C يستطيع تصريف 20لتر/ثا. بينما تقدر احتياجات القرية D بـ 30لتر/ثا، و القرية E 10لتر/ثا، والقرية F 20 لتر/ثا.

توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى طاقة تصريف كل منها محدودة وهي موضحة في الجدول التالي:

طاقة تصريف الأنابيب/ لتر/ثانية

المصب / المنبع	D	E	F	G
A	10	15	_	20
B	20	5	15	_
C	_	_	10	10

جدول13-1

و تكون الإشكالية هي البحث عن أفضل تموين ممكن لمختلف القرى عبر شبكة النقل المتاحة، أي إيجاد **أعظم تدفق ممكن** من الخزانات الثلاثة الى القرى الأربعة في وجود قيود طاقة التصريف للأنابيب.

ثانيا: خوارزمية الحل: لحل مثل هذه المسألة نتبع خوارزمية تسمى خوارزمية فورد فلكرسون Ford-Fulkerson، خطواتها كما يلي:

1- **رسم البيان:** يتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

أ-نحدد نقطة ما نسميها مدخل البيان و نرمز لها بـ E

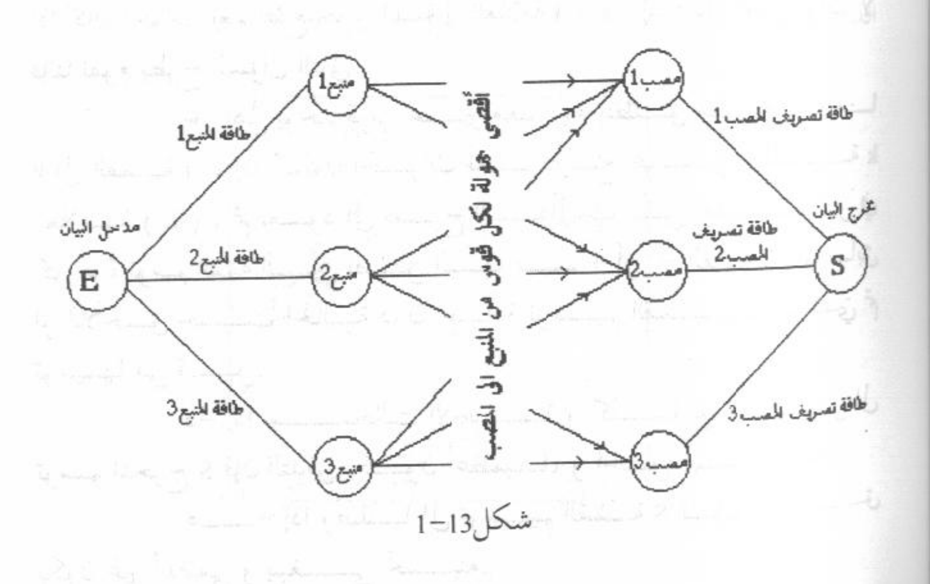
ب- نحدد قمم المنابع i ثم نصل بين قمة المدخل و قمم المنابع بأقواس طاقة كل منها أي حمولتها تساوي طاقة تصريف كل منبع.

ج- نحدد قمم المصبات (الى اليمين من المنابع)، ونصلها بالمنابع عن طريق أقواس و نحدد طاقة تصريف كل قوس.

د- نحدد نقطة أخرى خارج البيان الى اليمين من المصبات و نسميها مخرج البيان و نرمز لها بـ S.

هـ- نصل النقطة S بمختلف المصبات بأقواس طاقة تصريفها تساوي طاقة استقبال كل مصب.

ويصبح البيان كما يلي:



شكل13-1

2- البحث عن أمثل تدفق:

1- نبدأ من الأقواس التي تخرج من قمة المدخل، و نقوم بإرسال تدفق ما مع مراعاة ضرورة تسوية الوضعية عند كل قمة بحيث تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة (قاعدة كورشوف)، و دون تجاوز قدرة نقل كل قوس.

2- نقوم بتحسين التدفق حتى يكون كل مسار من المدخل **E** حتى المخرج S يحتوي على الأقل على قوس مشبع واحد (تدفق كامل)، و هذا حسب منهجية الخطوة 3 أدناه. (نقصد بالقوس المشبع أنه ينقل كمية تساوي تماما طاقة نقله القصوى)

3- ننطلق من القمة **E** و نجري ما يلي:

أ- نوسم القمة **E** بالإشارة + و نطرح السؤال التالي:

ب- هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة j؟ إذا كان الجواب نعم نضع بجوار القمة j العلامة (+j) ، إذا كان الجواب لا فإننا نقوم بطرح السؤال التالي:

ج- هل يوجد قوس غير معدوم ينطلق من قمة ما k الى القمة i ، إذا كان الجواب نعم نضع بجوار القمة k العلامة (-i) ، ثم نعود الى طرح السؤال ب من جديد و في كل مرة نوسم القمة التي نصل اليها بـ + أو - القوس السابق أو اللاحق حسب الحالة دون إعادة توسيم القمم التي تم توسيمها من قبل.

د- إذا استحالت الإجابة و كنا لم نصل الى توسيم المخرج S فإن التدفق يكون أعظميا، و الحل صار أمثلا.

هـ- إذا وصلنا الى توسيم القمة S فإن التدفق يكون غير أعظمي و ينبغي تحسينه.

و- إذا كنا أمام الحالة السابقة (الحالة هـ) نقوم بتحديد السلسلة الموسمة و نبدأ بتحسين الحل بإضافة أو انقاص أنسب كمية من الأقواس بحيث ينبغي مراعاة عدم تجاوز الطاقة القصوى للأقواس و عدم إحداث أقواس بقيمة سالبة.

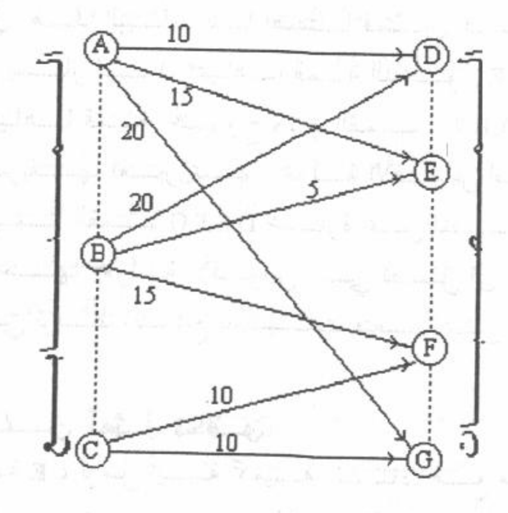
ل- نعود من جديد الى الخطوة ب.

ق- نكون امام التدفق الأعظمي لما يستحيل توسيم القمة S وفق الخوارزمية أعلاه (نقوم حينئذ بفصل القمم الموسمة عن غير الموسمة بقاطع، وتكون قيمة التدفق الأعظمي هي مجموع الأقواس التي تربط بين القمم الموسمة و القمم غير الموسمة المفصولة بالقاطع).

مثال 13-2: أوجد حل المسألة الواردة في المثال السابق.

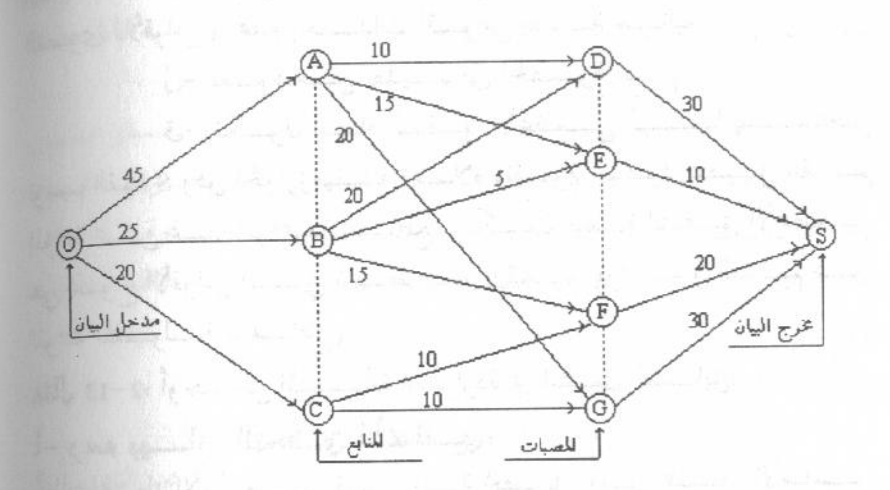
أ- رسم بيان التدفق الأعظمي:

بتطبيق الشطر الأول من الخوارزمية نحصل على البيان الأساسي الذي يظهر لنا طاقة تصريف كل أنبوب و هو التالي:



شكل13-2

بإضافة القمتين المساعدتين، قمة الدخول و قمة الخروج، نحصل على البيان المطلوب في الخوارزمية و هو:



شكل13-3

و يلاحظ في هذا البيان أننا أضفنا قمتين افتراضيتين، القمة الأولى على يسار البيان سميناها قمة الدخول E و الثانية على اليمين و سميناها قمة الخروج S؛ و القمم A,B C عبارة عن المنابع طاقة تصريفها تعبر عنها حمولة الأقواس التي تصل من القمة E ، بينما القمم D,E,F,G عبارة عن المصبات طاقة استقبالها تعبر عنها حمولة الأقواس التي تصل الى القمة S، بينما الأقواس التي تربط المنابع بالمصبات فتعبر عن طاقة تصريف الأنابيب.

ب- البحث عن أمثل تدفق:

- نبدأ من القمة E ، نرسل أية كمية نشاء، مع مراعاة قدرات تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية، فلو نرسل عبر القوس EC الكمية 20ل/ثا، فإنه يمكن تصريفها كلية عبر

الأقواس CG و Cf كليهما بمقدار 10 ل/ثا، و كذلك يمكن للكمية التي تمر عبر القوس CG بمقدار 10ل/ثا أن تصل كلية الى القمة S عبر القوس GS و كذلك الكمية التي تمر عبر القوس CF يمكن لها أن تصل كلية الى S عبر القوس FS ، فلنفعل:

- نمرر الكمية 20ل/ثا عبر القوس EC و بذلك يشبع كلية، (نميز القوس المشبع بخط مزدوج).

يمكن امرار الكمية التي وصلت الى القمة C و هي 20ل/ثا كما يلي:

- نمرر 10ل/ثا عبر القوس CG و بذلك يشبع هذا القوس، ثم نمرر الكمية التي وصلت الى G و هي بمقدار 10ل/ثا الى S عبر القوس GS ، لكن يلاحظ ان الطاقة القصوى لهذا القوس هي 30ل/ثا، و يعني ذلك أن هذا القوس لم يشبع في هذه المرحلة إذ يبقى قادرا على تصريف 20ل/ثا أي 30-10=20، لذلك نشطب القيمة 30 و نضع أمامها 20 و هي طاقة التصريف المتبقية (انظر الشكل13-4).
- نعود الى القمة C و نمرر الكمية المتبقية و هي 10ل/ثا عبر القوس CF و بذلك يشبع هذا القوس، ثم نصرف الكمية التي وصلت الى القمة F عبر القوس FS فيبقى لهذا القوس طاقة تصريف زائدة تقدر بـ10ل/ثا، لذلك نشطب 20 و نضع أمامها الطاقة المتبقية و هي 10ل/ثا.

لحد الآن تم تصريف كل الكمية التي عبرت من خلال القوس EC و وصلت الى القمة S.

- نعود الآن الى القمة E

نمرر الكمية 25 ل/ثا عبر القوس EB و بما أن طاقة تصريفه تساوي هذه الكمية لذلك فإن هذا القوس يشبع.
الكمية التي تصل الى القمة B هي اذن 25ل/ثا يمكن امرارها عبر الأقواس التي تخرج من هذه القمة كما يلي:

- نمرر 5ل/ثا عبر القوس BE و يشبع بذلك هذا القوس لأن طاقة تصريفه القصوى تساوي 5ل/ثا و تكون الكمية التي تصل القمة E هي اذن 5ل/ثا يمكن امرارها الى القمة S عبر القوس ES وحيث أن طاقة تصريف هذا القوس هي 10ل/ثا لذلك فإنه لايشبع لذلك نشطب عن القيمة 10 و نضع بدلها طاقة التصريف المتبقية و هي 5ل/ثا. بقي في القمة B لحد الآن 20 ل/ثا .
- طاقة القوس BF هي 15 ل/ثا لكن القوس الذي يليه و هو FS طاقة تصريفه المتبقية هي فقط 10ل/ثا، لذلك فأقصى ما يمكن تمريره عبر القوس BF هو 10ل/ثا تمر مباشرة الى S عبر القوس FS و بذلك يشبع هذا القوس تماما بينما القوس BF لايشبع و تبقى طاقة تصريف فائضة تقدر بـ 5ل/ثا.
- من الكمية التي وصلت B و هي 25ل/ثا تم تصريف 10ل/ثا عبر BF و 5ل/ثا عبر BE و تبقى 10 ل/ثا يتم تصريفها عبر BD و يتم تمريرها الى S عبر BD و تبقى طاقة تصريف غير مستغلة عبر القوس BD تقدر بـ 10ل/ثا و عبر القوس DS تقدر بـ 20ل/ثا.

و يتم بذلك تصريف كل الكميات التي وصلت B.

- نعود من جديد الى القمة E حيث لازالت القيمة 45ل/ثا لم تصرف فهل يمكن تصريفها كلية و إيصالها الى القمة S؟.

- نلاحظ أن الأقواس التي تنطلق من A قيمتها (10+15+20=45) و هي قيمة تساوي القيمة التي يمكن إيصالها الى القمة A عبر القوس EA ، غير أنه يلاحظ من جهة أخرى أنه لو تم إمرار كل هذه الكمية فإنه لابد من الإشباع الكلي للأقواس AG, AE, AD و لو يتم ذلك فإن القوس ES لا يتحمل لأن الطاقة المتبقية له هي 5ل/ثا حتى الآن، لذلك لا يمكن إمرار عبر AE سوى 5ل/ثا و تبقى طاقة غير مستغلة عبره تقدر بـ10ل/ثا و يشبع بذلك القوس ES.
- بالنسبة لبقية الأقواس التي تنطلق من A لايطرح أي مشكل.

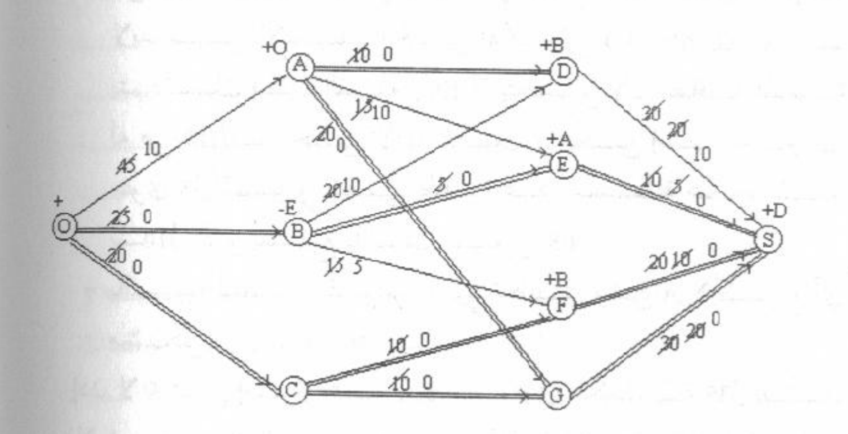
إذن لا يمكن إمرار عبر EA سوى الكمية 35ل/ثا، ولايشبع هذا القوس إذ تبقى طاقة زائدة مقدارها 10 ل/ثا.

فالكمية التي تصل A هي إذن 35ل/ثا تصرف كما يلي:

- عبر AE 5 ل/ثا كما أشرنا أعلاه و لايشبع هذا القوس، تمر هذه الكمية من E عبر القوس ES و يشبع هذا القوس.
- نمرر 20ل/ثا عبر القوس AG و يشبع تماما، و تصرف الكمية التي وصلت الى G عبر GS حيث كانت هناك طاقة غير مستغلة متبقية تساوي 20ل/ثا يتم إستغلالها و يشبع بذلك هذا القوس تماما.

- نمرر الكمية المتبقية و هـي 10ل/ثـا عـبر AD حيث يشبع هذا القـوس تمامـا، ثم نصـرف هـذه الكميـة مـن D عـبر DS حيث لايشبع هذا القـوس و تبقى طاقـة غـير مستغلة فيه تساوي 10ل/ثـا.

و تكون بذلك كل الكميـات الـتي خرجـت مـن E و المقـدرة بـ 80ل/ثا قـد وصلـت الى القمـة S.



شكل13-4

ملاحظـات:

- في كل قمـة يجـب أن تكـون الكميـات الداخلـة تسـاوي الكميات الخارجـة (قـاعدة كورشـوف).

و كتأكيد على ذلـك نجـد:

- في القمة A الكمية التي تدخل هي 35ل/ثا و الكميات التي تخرج عبر الأقواس AD, AE, AG تساوي أيضا 35ل/ثا.
- في القمة B الكمية الـتي تدخـل هـي 25ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر الأقـواس BD, BE, BF هـي أيضـا 25ل/ثـا.

- في القمة C الكميـة الـتي تدخـل هـي 20ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر الأقـواس CF, CG هـي أيضـا 20ل/ثـا.
- في القمة D الكميـة الـتي تدخـل هـي 20ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر القـوس DS هـي 20ل/ثـا.
- في القمة E الكمية الـتي تدخـل هـي 10ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر القـوس ES هـي 10ل/ثـا.
- في القمة F الكميـة الـتي تدخـل هـي 20ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر القـوس FS هـي 20ل/ثـا.
- في القمة G الكمية الـتي تدخـل هـي 30ل/ثـا و الكميـات التي تخرج عبر القـوس GS هـي 30ل/ثـا.

- إعتمادا على الملاحظـة الأولى فـإن مـا يخـرج مـنE يجب أن يساوي مـا يصـل الى S
- أن كل مسار من E الى S يحتـوي علـى الأقـل علـى قـوس واحد مشبع (تدفـق كـامل).

إن التدفق الذي حصلنا عليه حتى الآن و الذي يظهره البيان في الشـكل 13-4 هو تدفق يظهر حلا أساسيا أولا يمكن التعبير عنه بالجدول التالي:

المصب / المنبع	D	E	F	G	الكمية المصرفة
A	10	5	_	20	35
B	10	5	10	_	25
C	-	-	10	10	20
الكمية المستقبلة	20	10	20	30	80

جدول13-2

و يظهر جليا أن ما تم تصريفه لحد الآن هو 80ل/ثا، و تفسيره كما يلي:

- من الخزان A يرسل تدفـق بقيمـة 35 ل/ثـا عـبر :
  - الأنبوب AD بتدفق 10ل/ثا.
  - الأنبوب AE بتدفق 5ل/ثا.

- الأنبوب AG بتدفق 20ل/ثا.
- من الخزان B يرسل تدفق بقيمة 25 ل/ثا عبر :
- الأنبوب BD بتدفق 10ل/ثا.
- الأنبوب BE بتدفق 5ل/ثا.
- الأنبوب BF بتدفق 10ل/ثا.
- من الخزان C يرسل تدفق بقيمة 20 ل/ثا عبر :
- الأنبوب CF بتدفق 10ل/ثا.
- الأنبوب CG بتدفق 10ل/ثا.

و ما تم استقباله في القرى الثلاث أيضا هو 80ل/ثا و ذلك كما يلي:
- القرية D تستقبل 20 ل/ثا موزعة كما يلي:
- عبر الأنبوب AD بطاقة 10ل/ثا.
- عبر الأنبوب BD بطاقة 10ل/ثا.
- القرية E تستقبل 10 ل/ثا موزعة كما يلي:
- عبر الأنبوب AE بطاقة 5ل/ثا.
- عبر الأنبوب BE بطاقة 5ل/ثا.
- القرية F تستقبل 20 ل/ثا موزعة كما يلي:
- عبر الأنبوب BF بطاقة 10ل/ثا.
- عبر الأنبوب CF بطاقة 10ل/ثا.
- القرية G تستقبل 30 ل/ثا موزعة كما يلي:
- عبر الأنبوب AG بطاقة 20ل/ثا.
- عبر الأنبوب CG بطاقة 10ل/ثا.

و يلاحظ أن ما يخرج من الخزانات يساوي تماما ما يصل الى القرى.

ج- إختبار الحل و تحسينه:

بعد الحصول على الحل الأساسي الأول يتم إختبار هذا الحل إذا كان امثلا أم لا، و يتم ذلك بتطبيق المرحلة الثانية من خوارزمية فورد-فلكرسون، كما يلي:

- نوسم القمة **E** بالإشارة + ، و نطرح السؤال: هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة **E** ؟ الإجابة نعم و هو القوس **EA**: نضع بجوار القمة A الإشارة **E**+

- **في القمة A** : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة A ؟ الإجابة نعم هو القوس AE: نضع بجوار E الإشارة A+

- **في القمة E** : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة E ؟ الإجابة لا يوجد قوس غير مشبع ينطلق من E .

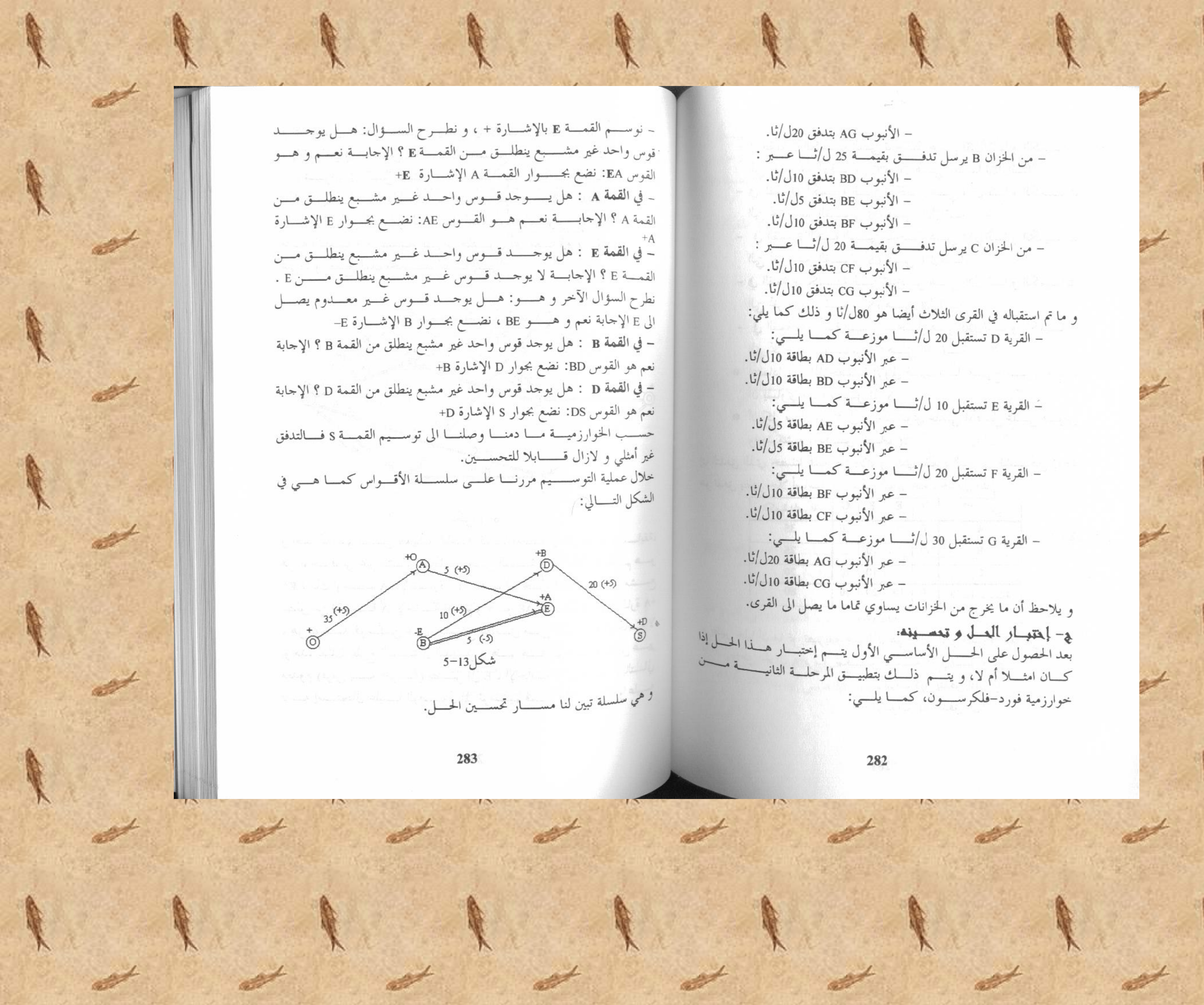
نطرح السؤال الآخر و هو: هل يوجد قوس غير معدوم يصل الى E الإجابة نعم و هو BE ، نضع بجوار B الإشارة E−

- **في القمة B** : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة B ؟ الإجابة نعم هو القوس BD: نضع بجوار D الإشارة B+

- **في القمة D** : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة D ؟ الإجابة نعم هو القوس DS: نضع بجوار S الإشارة D+

حسب الخوارزمية ما دمنا وصلنا الى توسيم القمة S فالتدفق غير أمثلي و لازال قابلا للتحسين.

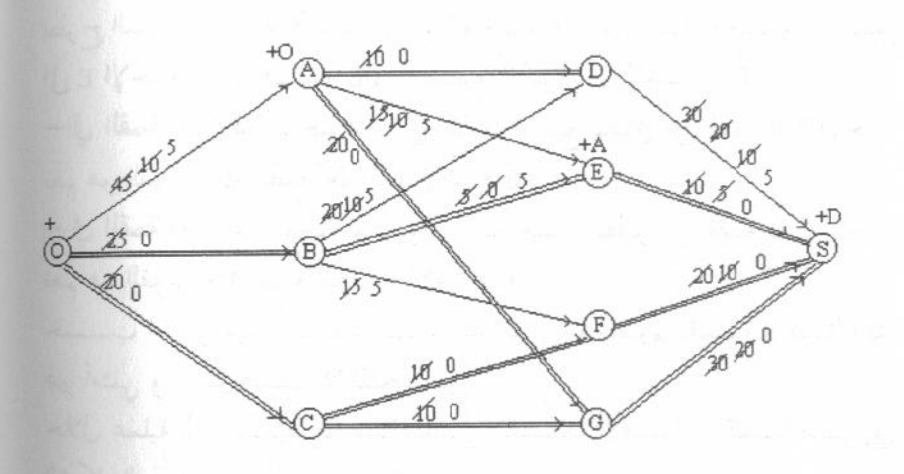
خلال عملية التوسيم مررنا على سلسلة الأقواس كما هي في الشكل التالي:



شكل13-5

و هي سلسلة تبين لنا مسار تحسين الحل.

و لتحسين الحل ينبغي الزيادة في الأقواس EA , AE, BD, DS والإنقاص في القوس BE بحيث يسمح ذلك بتحقيق قاعدة كورشوف في كل قمة، و نلاحظ أنه لا يمكن تخفيض BE بأكثر من 5 ل/ثا لأن ذلك يؤدي الى قيمة سالبة، لذلك نضيف القيمة 5 الى كل أقواس السلسلة ما عدا القوس BE فإننا نطرح منه القيمة 5 و يصبح قوس صفري أي معدوم لا ينقل عبره شيء، و يصبح البيان الجديد كما يلي:



شكل13-6

و نعيد التوسيم من جديد تماما كما فعلنا في المرحلة السابقة، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة **E** الإجابة نعم هو **EA** لذلك نوسم A بالإشارة **E**+، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة A الإجابة نعم و هو AE نوسم E بالإشارة A+ ، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة E الإجابة لا يوجد، لذلك نطرح السؤال البديل و هو هل يوجد قوس غير معدوم (قوس به حمولة) يصل الى E ، الإجابة لا يوجد، وبالتالي فإنه إستحال علينا الوصول الى توسيم قمة الخروج S و عليه

فالحل المتوصل اليه هو حل أمثل، أي أننا وصلنا الى أعظم تدفق و هو ما يوضحه الجدول التالي:

الكمية المصرفة	G	F	E	D	المصب / المنبع
40	20	_	10	10	**A**
25	_	10	0	15	**B**
20	10	10	_	_	**C**
85	**30**	**20**	**10**	**25**	**الكمية المستقبلة**

جدول13-3

و يكون أعظم تدفق لهذه المسألة كما يلي:

- نرسل من الخزان A 40 ل/ثا عبر الأنابيب:
  - AD 10 ل/ثا
  - AE 10ل/ثا.
  - AG 20ل/ثا
- نرسل من الخزان B 25 ل/ثا عبر الأنابيب:
  - BD 15 ل/ثا
  - BF 10ل/ثا.
- نرسل من الخزان C 20 ل/ثا عبر الأنابيب:
  - CF 10 ل/ثا
  - CG 10ل/ثا.

كما تستقبل القرية D 25 ل/ثا من الخزانين A ;B.
و تستقبل القرية E 10 ل/ثا من الخزانE
و تستقبل القرية F 20 ل/ثا من الخزانين Bو C
أما القرية G فتستقبل 30 ل/ثا من الخزانين A و C
و يلاحظ أن القرية D لم تلبى كل احتياجاتها إذ بقي عجز يقدر بـ5 ل/ثا، كما أن الخزان A لا يشتغل بكامل طاقته.
و يكون هذا أعظم تدفق ممكن.

تمارين

تمرين1: يقوم الديوان الوطني للحبوب بتأمين إحتياجات البلاد من مختلف الحبوب الأساسية، لهذا الديوان كميات مخزنة بموانئ بعض الدول الممونة، هذه الموانئ هي A, B, C, D إن الكميات المخزنة في كل ميناء بآلاف الأطنان هي:

الميناء المصدر	A	B	C	D
الكمية المخزنة	140	120	120	120

يريد الديوان نقل هذه الكميات الى الموانئ الوطنية E, F, G, H قدرات إستقبال كل ميناء بألاف الأطنان هي:

الميناء الوجهة	E	F	G	H
قدرة الإستقبال	120	100	110	170

عدة بواخر يمكن رصدها لنقل هذه الكميات الى الموانئ الوطنية، إلا أن طاقة نقل البواخر من كل ميناء منبع الى كل ميناء مصب تختلف و هي بآلاف الأطنان موضحة في الجدول التالي:

	E	F	G	H
A	90	50	40	–
B	70	60	30	–
C	–	40	60	100
D	–	40	60	100

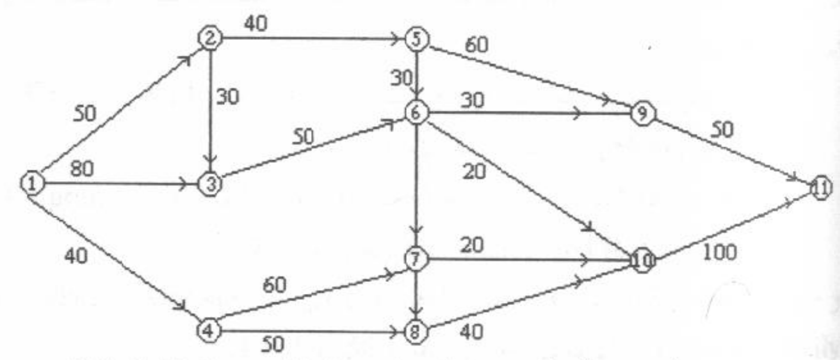
a_{ij} : الكمية التي يمكن أن تنقلها الباخرة من الميناء المصدر i الى الميناء المستقبل j.

المطلوب: حدد الكميات التي يجب أن تنقلها كل باخرة من كل ميناء مصدر الى كل ميناء مستقبل و التي من شأنها أن تعظم الكميات المنقولة الى مختلف موانئ الوطن.

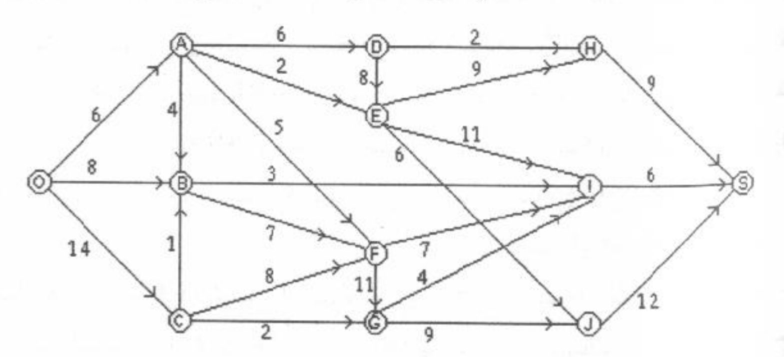
تمرين 2: أوجد أعظم تدفق بين الخزانات A , B , C والقرى W , X , Y , Z إذا علمت أن طاقة تصريف الأنابيب الرابطة بين الخزانات و القرى وطاقة تصريف كل خزان و طاقة استقبال كل قرية موضحة في الجدول التالي:

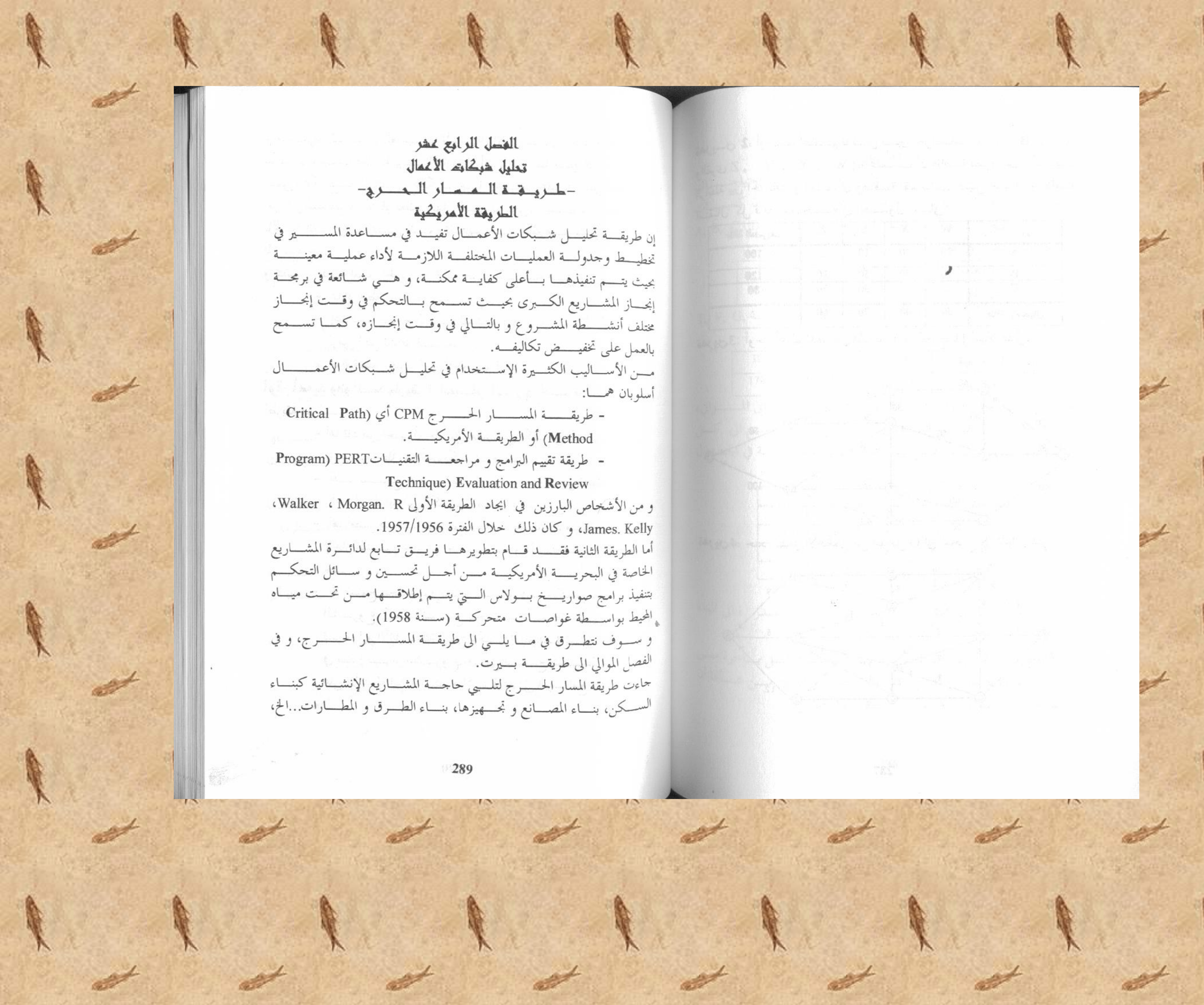
القرية / الخزان	W	X	Y	Z	طاقة التصريف
A	20	30	10	–	100
B	10	70	50	30	120
C	–	–	30	70	80
طاقة الإستقبال	30	40	70	60	

تمرين3: أوجد أعظم تدفق بين المدخل 1 و المخرج 11 للبيان التالي:



تمرين4: حدد التدفق الأعظمي من المدخل O الى المخرج S للبيان التالي:





الفصل الرابع عشر
تحليل شبكات الأعمال
-طريقة المسار الحرج-
الطريقة الأمريكية

إن طريقة تحليل شبكات الأعمال تفيد في مساعدة المسير في تخطيط وجدولة العمليات المختلفة اللازمة لأداء عملية معينة بحيث يتم تنفيذها بأعلى كفاية ممكنة، و هي شائعة في برمجة إنجاز المشاريع الكبرى بحيث تسمح بالتحكم في وقت إنجاز مختلف أنشطة المشروع و بالتالي في وقت إنجازه، كما تسمح بالعمل على تخفيض تكاليفه.

من الأساليب الكثيرة الإستخدام في تحليل شبكات الأعمال أسلوبان هما:

- طريقة المسار الحرج CPM أي (Critical Path Method) أو الطريقة الأمريكية.
- طريقة تقييم البرامج و مراجعة التقنياتPERT (Program Evaluation and Review Technique)

و من الأشخاص البارزين في ايجاد الطريقة الأولى R .Morgan ، Walker، James. Kelly، و كان ذلك خلال الفترة 1956/1957.

أما الطريقة الثانية فقد قام بتطويرها فريق تابع لدائرة المشاريع الخاصة في البحرية الأمريكية من أجل تحسين و سائل التحكم بتنفيذ برامج صواريخ بولاس التي يتم إطلاقها من تحت مياه المحيط بواسطة غواصات متحركة (سنة 1958).

و سوف نتطرق في ما يلي الى طريقة المسار الحرج، و في الفصل الموالي الى طريقة بيرت.

جاءت طريقة المسار الحرج لتلبي حاجة المشاريع الإنشائية كبناء السكن، بناء المصانع و تجهيزها، بناء الطرق و المطارات...الخ،

و مشاريع البحوث العلمية، الأعمال الإدارية...الخ ، و هذا لتكون وسيلة فعالة بيد الإدارة، إذ أنها تمكننا من أن نبين الصورة الكاملة للمشروع بكل ما يشتمل عليه من أعمال جزئية وتسلسلها و اعتماد بعضها على بعض، بحيث تسمح لنا باتخاذ القرارات على ضوء تفهم جيد لتأثيرها على كامل المشروع.

و تتضمن طريقة المسار الحرج 3 مراحل رئيسية هي:

- إعداد خطة إنجاز المشروع.
- إعداد البرنامج الزمني للمشروع من خلال البرنامج الزمني لكل نشاط فيه.
- مراقبة سير العمل و التحكم فيه.

أولا: أهمية وفوائد طريقة المسار الحرج: أهم فوائد هذه الطريقة ما يلي:

- أنها تفترض إجراء تحليل تفصيلي لكامل المشروع مما يؤدي الى خطة عمل متحكم فيها.
- أنها تسمح بتوفير صورة واضحة عن تسلسل الأعمال الجزئية التي يتكون منها المشروع.
- أنها أفضل طريقة تسمح بتقدير المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع أو أي جزء منه و ذلك بمستوى دقة جيد.
- أنها تسمح بتحديد تواريخ بدء و نهاية كل نشاط في المشروع، كما تسمح بتحديد الأنشطة التي ينبغي تسريعها و الأنشطة التي يمكن تأخيرها بدون التأثير في مدة إنجاز المشروع، فهي تسمح بتسليط الضوء على الأنشطة التي تؤثر مباشرة على البرنامج و بالتالي

تسمح بإعطائها العناية اللازمة لتنفيذها في الأوقات اللازمة.

- أنها تشكل إطارا و نظاما لمراقبة سير العمل في تنفيذ المشروع و لإعداد التقارير الدورية عن سير العمل و البيانات و التحليلات.
- أنها تسهل إجراء ما يمكن من تعديلات عند الضرورة على خطة العمل مع الاحتفاظ بالسيطرة على مجرى العمل.
- أنها تشكل أساسا لتقييم مدى تأثير أي تأخر أوتعديل يطرأ أثناء تنفيذ المشروع على مدة إنهائه.
- أنها تشكل أساسا لوضع جدول اليد العاملة والمعدات و الآلات يتماشى مع مختلف مراحل إنجاز المشروع.
- أنها تمكننا من معرفة الأنشطة التي يمكن تسريعها لتسريع مدة إنجاز المشروع و ذلك بمبادلة الوقت بالمال.
- تمكننا من الضبط الجيد لتكلفة المشروع، كما تمكننا من تحديد مواعيد تزويد المشروع بمختلف مستلزمات انجازه.
- أنها تمكننا من معرفة تفاصيل الأنشطة المختلفة للمشروع و بالتالي تقلل من احتمال نسيان أي نشاط.

ثانيا: تخطيط و جدولة شبكات الأعمال: لإعداد شبكة الأعمال لابد من المرور بثلاث مراحل أساسية و هي:

- تحديد جميع الأنشطة التي يتكون منها المشروع.

- تحديد التسلسل أو الترتيب المنطقي الذي يجب أن تنفذ الأنشطة طبقا له.
- رسم مخطط شبكي يين الأنشطة حسب الترتيب الذي يتم التوصل إليه في المرحلة الثانية.

1- مفاهيم أساسية: إن إعداد شبكات الأعمال يتطلب الإلمام بمجموعة من المصطلحات الأساسية منها ما يلي:

أ- مفهوم الحدث: الحدث هو إنجاز معين يتم عند نقطة معينة و معروفة من الزمن، و بعبارة أخرى يقصد بالحدث الوصول عند مرحلة معينة من تنفيذ المشروع، أي أنه عبارة عن واقعة مقرونة بعامل الزمن التي تحدد بداية أو نهاية زمن أي نشاط، و يعبر عنه بيانيا بدائرة تكتب في داخلها إشارة (رقم أوحرف) تمثل ترتيب الحدث في الشبكة.

و قد يكون الحدث فرديا حينما يكون نتيجة لنشاط واحد، وقد يكون مركبا حينما يكون نتيجة لعدة أنشطة.

شكل14-1

ب- مفهوم النشاط: هو العمل اللازم لإتمام حدث معين، أوهو أي جزء من المشروع يستغرق وقتا و له بداية و نهاية، ويتطلب تخصيص مورد من موارد المشروع المراد إنجازه، ويشار اليه بيانيا بسهم رأسه يمثل إتجاه سير النشاط، و حينئذ يكون النشاط فعليا، و قد يكون النشاط وهميا يستعان به في رسم الشبكة و هو لايكلف وقتا و لامالا و يُمثل في الشبكة عن طريق خط متقطع، كما في الشكل 14-7.

و كل نشاط يوجد بين حدثين، الأول هو حدث البداية والثاني هو حدث النهاية (انظر الشكل14-1).

ج- الأنشطة المتتابعة: هي الأنشطة المتعاقبة وفق ترتيب معين، حيث لا يمكن إنجاز النشاط اللاحق إلا بعد الإنتهاء من النشاط السابق، و تقدم في الشبكة على النحو التالي:

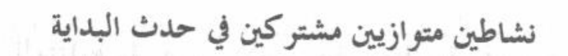
سلسلة من الأنشطة المتتابعة

شكل14-2

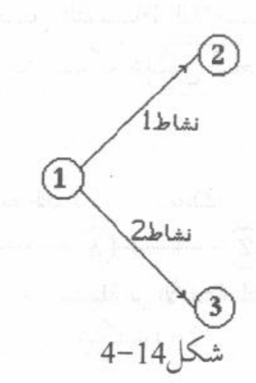
د- الأنشطة المتوازية: هي الأنشطة التي يمكن إنجازها في نفس الوقت، أي أن إنجاز أي منها لايتوقف على الآخر، ويمكن أن يكون هناك نشاطين متوازيين، كما يمكن أن تكون هناك عدة أنشطة متوازية، عمليا يمكن أن نصادف نشاطين متوازيين مستقلين أو أنشطة كتوازية مشتركة في حدث البداية أو في حدث النهاية، و يظهر ذلك في الأمثلة التالية:

نشاطين متوازين مستقلين

شكل14-3

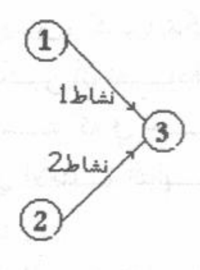


نشاطين متوازيين مشتركين في حدث البداية



شكل14-4

نشاطين متوازيين مشتركين في حدث النهاية

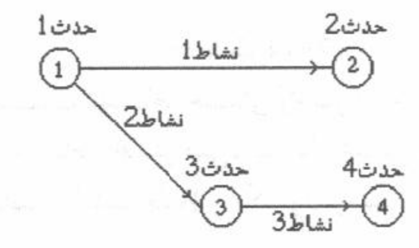


شكل14-5

هـ - المشروع: عبارة عن إنجاز يتكون من مجموعة من الأنشطة المتتالية و المتداخلة يتم تنفيذها على أساس التتابع الزمني لها و أولوية إبتدائها.

2- إعداد شبكة الأعمال: تعد شبكة الأعمال بمراعاة الخطوات التالية:

أ- يمثل كل نشاط بسهم واحد، و يقع كل من طرفي السهم (ذيله و رأسه) عند دائرة صغيرة تسمى حدثا كما يظهر ذلك في الشكل الموالي:



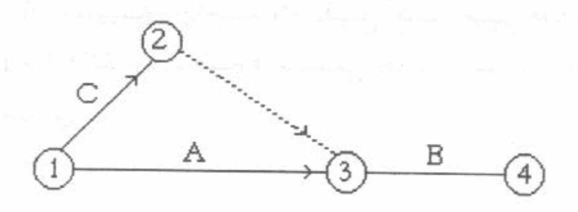
شكل14-6

ب- من قواعد إعداد الشبكة أيضا أن كل سهم يجب أن يكون بين حدثين، و أنه يجب أن يكون للمشروع بداية واحدة، و أن مراعاة تتابع الأنشطة تستوجب أحيانا إضافة أسهم خيالية زمن تنفيذها معدوم.

مثال14-1: نفترض أنه لدينا مشروعا يتكون من ثلاثة أنشطة هي: A, B, C و أنه يشرع في تنفيذ النشاط B بعد الإنتهاء من النشاطين A و C أي :

- النشاط A لا يسبقه شيئا.
- النشاط C لا يسبقه شيئا.
- النشاط B يسبقه A و C.

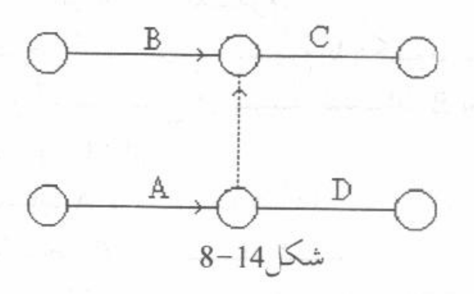
إن رسم شبكة هذه الأنشطة يكون كما في الشكل التالي:



شكل14-7

يلاحظ أنه أُحـــدث نشـــاط خيـــالي رمـــز لـــه بســـهم متقطـــع و هـــو عبـــارة عـــن نشـــاط افـــتراضي، ليـــدل علـــى أن النشـــاطين A و C، كليـــهما ســـابقين للنشـــاط B و يكـــون زمـــن تنفيـــذ هـــذا النشـــاط صفـــو.

مثـــال14-2: إذا كـــان النشـــاطان A و B يســـبقان النشـــاط C و النشاط D مســـبوق بالنشـــاط A ، فـــإن تمثيـــل هـــذه الأنشـــطة علـــى شبكة الأعمال يتم كمـــا يلـــي:

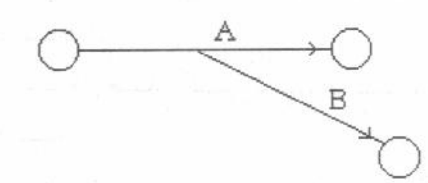


شكل14-8

يظهر البيـــان أن النشـــاط C مســـبوق بالنشـــاطين B و A و النشط D يســـبقه النشـــاط A.
و إذا كـــان النشـــاطان A و B غـــير مســـبوقين بـــأي نشـــاط، فإنهمـــا يشتركان في حـــدث البدايـــة.

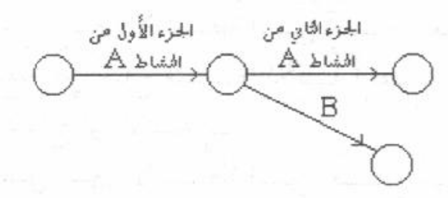
ج- من قواعـــد رســـم شـــبكات الأعمـــال أيضـــا عـــدم البـــدء في أي نشاط قبل إنهاء النشاط السابق له فـــلا يجـــوز التقـــديم التـــالي:

تقديم خاطيء



شكل14-9

فرســـم الشـــبكة بهـــذا الشـــكل خـــاطئ، و إذا كـــان لابـــد البـــدء بالنشـــاط B بعـــد إنجـــاز جـــزء مـــن النشـــاط A و اخترنـــا أن ننفـــذ العمل بهـــذه الطريقـــة، فإنـــه علينـــا أن نقســـم النشـــاط A الى نشـــاطين أي جزأين و نرسم الشـــبكة كمـــا في الشـــكل التـــالي:



شكل14-10

بحيث نعتـــبر أن الجـــزء الأول مـــن النشـــاط A هـــو حـــدث مســـتقل و الجزء الثاني من النشاط A هـــو أيضـــا حـــدث مســـتقل.
د - لـــدى القيـــام برســـم الشـــبكة ينبغـــي اتبـــاع الـــترتيب المنطقـــي للأنشـــطة خطـــوة بخطـــوة، و علينـــا أن نطـــرح الأســـئلة التاليـــة عنـــد كل نشـــاط:

- ما هي الأنشطة التي يجب إنهاؤها قبل أن يصبح بالإمكان البدء بهذا النشاط؟
- ما هي الأنشطة التي يمكن تنفيذها في أثناء تنفيذ هذا النشاط؟
- ما هي الأنشطة التي يتوقف البدء بها على إنهاء هذا النشاط؟

هـ – تحدد مدة إنجاز كل نشاط باليوم أو أجزائه، الشهر، أضعافه أو أجزائه.

و – قبل الشروع في رسم الشبكة يجب التمييز جيدا بين مختلف الأنشطة و تحديدها تحديدا جيدا، مع مراعاة ما يلي:

- الفصل بين الأنشطة التي تعود مسؤولية إنجازها الى جهات مختلفة، فالأعمال التي تقوم بها مؤسسة ما تفصل عن الأعمال التي تقوم بها مؤسسة أخرى.
- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج الى اختصاصات متمايزة حرفية أو فنية أو غيرها.
- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج معدات متمايزة، فالأنشطة التي تحتاج مثلا للآلة أ تفصل عن الأنشطة التي تحتاج الى الآلة ب.
- الفصل بين الأنشطة التي تحتاج مواد مختلفة، فالأنشطة التي تستعمل فيها الخرسانة مثلا تفصل عن الأنشطة التي تستخدم فيها الهياكل الحديدية.
- الفصل بين الأجزاء الإنشائية المختلفة، كالجدران، الأسقف، التلبيس ...الخ.
- الفصل بين الأنشطة التي تنفذ في أماكن مختلفة من المشروع في أوقات مختلفة أو بواسطة فرق عمل مختلفة أو مؤسسات مختلفة.

ثالثا: تحديد المسار الحرج: كما سبقت الإشارة فإن شبكة الأعمال تتكون من مجموعة كبيرة من الأنشطة المتتالية و المتوازية و المتداخلة، و التي يتم التعبير عنها بأسهم مرسومة حسب قواعد إعداد الشبكة، بحيث كل نشاط يتطلب وقتا معينا لتنفيذه يكتب فوق السهم أو أسفله، أي أن جميع الأسهم تكون مقيمة بإستثناء الأسهم التي تمثل الأنشطة الخيالية التي يتم الإستعانة بها حيث يكون زمن تنفيذها معدوما.

إن تتابع هذه الأسهم يشكل لنا مسارا من أول حدث في المشروع الى آخر حدث، و أطوال هذه المسارات تختلف، غير أن المسار الذي يستغرق أطول وقت زمني ممكن من بين جميع مسارات شبكة الأعمال هو الذي يشكل لنا **المسار الحرج**، أي أن مجموع أوقات هذا المسار هي التي تحدد لنا الوقت اللازم للإنتهاء من المشروع، بحيث أن التأخير في إنجاز أي نشاط من الأنشطة الواقعة على المسار الحرج يؤدي الى تأخير وقت الإنتهاء من المشروع، فكل النشاطات التي تقع على هذا المسار هي نشاطات حرجة ينبغي الحرص على تنفيذها في مواعيدها، أما بقية الأنشطة فهي غير حرجة، و لتحديد المسار الحرج يتم حساب عددا من الأوقات يعتمد عليها في التسيير الزمني لكامل المشروع.

و تستخدم في شبكات الأعمال العادية **ستة أوقات هي:**

- الوقت المبكر لبداية النشاط.
- الوقت المبكر لنهاية النشاط.
- الوقت المتأخر لبداية النشاط.
- الوقت المتأخر لنهاية النشاط.
- وقت السماح الكلي.
- وقت السماح الحر.

تحسب هذه الأوقات على ثلاث مراحل:

المرحلة الأولى: تتم على الشبكة و نسميها مرحلة الذهاب، و يحسب **فيها الوقت المبكر لبداية كل النشاط. والوقت المبكر لبداية النشاط هو أبكر وقت ممكن للبدء بالنشاط عند أخذ الوقت اللازم للأنشطة التي تسبقه بعين الاعتبار.**

الوقت المبكر لبداية النشاط= الوقت المبكر لبداية النشاط السابق له + مدة إنجاز النشاط السابق

و يكون الوقت المبكر لبداية أول نشاط صفرا.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: عندما يكون النشاط مسبوقا بنشاطين أو أكثر فإن بدايته المبكرة يحكمها النشاط السابق له ذو أكبر نهاية مبكرة، علما أن:

الوقت المبكر لبداية النشاط= الوقت المبكر لنهاية النشاط السابق له.

المرحلة الثانية: تتم على الشبكة أيضا و نسميها **مرحلة الإياب**، و يحسب فيها **الوقت المتأخر لنهاية النشاط**، و هو آخر وقت ممكن لإنهاء النشاط، بحيث يظل بالإمكان إنهاء المشروع بكامله في التاريخ المحدد.

إن الوقت الذي ينتهي فيه المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية آخر الأنشطة زائدا مدة تنفيذ هذه الأنشطة، ونسميه أبكر وقت لإنهاء المشروع.

و يكون:

الوقت المبكر لنهاية المشروع=الوقت المتأخر لنهاية المشروع أو الوقت المتأخر لتنفيذ آخر الأنشطة.

أي في آخر قمة يكون لنا:

الوقت المبكر للبداية=الوقت المتأخر للنهاية

تدون هذه الأوقات في آخر حدث من المشروع كما يلي:



شكل14-11

في بقية القمم يكون لنا:

الوقت المتأخر لنهاية النشاط=الوقت المتأخر لنهاية النشاط اللاحق- مدة تنفيذ النشاط اللاحق.

مع الأخذ بالقاعدة التالية: **عندما يكون النشاط مسبوقا بنشاطين أو أكثر فإن نهايته المتأخرة تحكمها أبكر بداية متأخرة بين الأنشطة التي تتبعه.**

المرحلة الثالثة: مرحلة تدوين الأوقات الهامشية الأخرى في جدول نسميه جدول الأوقات الهامشية، أو جدول المراقبة الزمنية للمشروع، و هو يحتوي على المعلومات التالية:

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	دليل النشاط	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		وقت السماح		النشاط الحرج
				للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية	الكلي	الحر	

جدول14-1

في الجدول نضع الأوقات التي حسبت على الشبكة و هي الأوقات المبكرة للبداية و الأوقات المتأخرة للنهاية، أما بقية الأوقات التي لم تحسب على الشبكة فتحسب كما يلي:

الوقت المبكر لنهاية النشاط: هو أبكر وقت ممكن لإنهاء النشاط، يحسب كما يلي:

الوقت المبكر لنهاية النشاط=الوقت المبكر لبداية النشاط+ مدة تنفيذ هذا النشاط.

الوقت المتأخر لبداية النشاط: هو آخر وقت يمكن بدأ النشاط فيه دون أن يؤدي ذلك الى تأخير نهاية المشروع، ويحسب كما يلي:

الوقت المتأخر للبداية = الوقت المتأخر للنهاية – مدة تنفيذ النشاط.

وقت السماح الكلي: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت نهايته المبكرة الممكن بدون التسبب في إطالة مدة تنفيذ المشروع، أي أنه عبارة عن مقدار الوقت الذي يمكن للنشاط أن يستهلكه زيادة على المدة المقدرة التي يحتاجها النشاط دون أن يتسبب ذلك في إطالة مدة المشروع، و يحسب كما يلي:

السماح الكلي= البداية المتأخرة – البداية المبكرة

أو:

السماح الكلي= النهاية المتأخرة – النهاية المبكرة

السماح الحر: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت نهايته المبكرة بدون التسبب بتأخير البداية المبكرة لأي نشاط آخر، وبعبارة أخرى هو مقدار الوقت المتاح للنشاط زيادة على المدة المقدرة التي يحتاجها، أي الوقت الذي يمكن للنشاط أن يستهلكه دون التأثير على إمكانية بدء أي نشاط لاحق في وقت بدايته المبكرة، و يحسب كما يلي:

السماح الحر=البداية المبكرة لأبكر نشاط لاحق–النهاية المبكرة للنشاط

المرحلة الرابعة: تحديد المسار الحرج: المسار الحرج هو سلسلة الأنشطة التي يساوي السماح الكلي لكل منها صفرا، وذلك من بداية المشروع الى نهايته، و هو الذي يحدد مدة إنجاز المشروع، و قد يكون للمشروع أكثر من مسار حرج.

و ما يجب أن نلفت إليه الانتباه هو أنه إذا حصل تأخير في تنفيذ أي نشاط حرج، فإن ذلك يؤدي الى تأخير إنهاء المشروع بنفس المقدار، لذا فإنه من المهم تحديد الأنشطة الحرجة نظرا لأنها تحتاج أثناء تنفيذ المشروع الى مراقبة دقيقة لضمان التقيد بالبرنامج.

و تحدد الأنشطة الحرجة على الشبكة و نميزها عن غيرها بمسار مزدوج الخطوط، و تقع هذه الأنشطة بين القمم التي تكون فيها الأوقات المبكرة للبداية مساوية للأوقات المتأخرة للنهاية.

مثال14-3: الجـــدول التـــالي يظـــهر مجموعـــة الأنشـــطة الـــتي يتكـــون منـــها مشـــروع بنـــاء مســـكن وكـــذا أوقـــات تنفيـــذ كـــل نشـــاط والأنشطة السابقة لكـــل نشـــاط بالأيـــام.

إسم النشاط	رمز النشاط	الأنشطة السابقة	الوقت اللازم لتنفيذ النشاط
تسوية الأرضية	A	–	6
بناء القواعد	B	A	20
بناء الجدران	C	B	12
شراء الحديد	D	-	20
تهيئة الحديد	E	D	24
شراء الأسمنت	F	–	6
وضع الأسقف	G	F	20
طلاء المبنى	H	G	4

جدول14-2

المطلـــوب:

1- ارسم شـــبكة الأعمـــال.

2- احسب الأوقات المبكـــرة للبدايـــة و للنهايـــة

3- احسب الأوقات المتـــأخرة للبدايـــة و للنهايـــة.

4- حدد الأنشـــطة الحرجـــة.

5- ما هي مدة تنفيـــذ المشـــروع.

1- رسم شـــبكة الأعمـــال:

حسب مبـــدأ رســـم الشـــبكة فـــإن بدايـــة المشـــروع تكـــون واحـــدة ونهايتـــه تكـــون واحـــدة، لذلـــك تم الانطـــلاق مـــن قمـــة واحـــدة (حدث البداية) و تم الانتهاء عنـــد قمـــة واحـــدة (حـــدث النهايـــة).

و يلاحظ في الرسم أننا راعينا الأنشـــطة الســـابقة لكـــل نشـــاط.

كما وضع زمن تنفيذ كـــل نشـــاط بـــين قوســـين أمـــام إســـم النشـــاط إما أعلى السهم الذي يمثـــل النشـــاط أو أســـفله.

A(6) B(20) C(12)
D(20) E(24)
F(6) G(20) H(4)

شكل14-12

يظهر من الرسم الشـــبكي أننـــا حرصنـــا علـــى تتـــابع الأنشـــطة كمـــا هي في الجدول أعـــلاه.

2- حســـاب الأوقـــات:

- **الأوقات المبكـــرة لبدايـــة كـــل نشـــاط:** الوقـــت المبكـــر لبداية كل نشاط هـــو أبكـــر وقـــت ممكـــن نســـتطيع أن نبـــدأ فيـــه النشاط، و هو عبارة عـــن الوقـــت المبكـــر لبدايـــة النشـــاط الســـابق زائدا مدة تنفيذ النشـــاط، مـــع العلـــم أن الوقـــت المبكـــر للأنشـــطة غير المســـبوقة و هـــي A,D,F تســـاوي صفـــر، و يتـــم حســـاب هذه الأوقات على الشـــبكة كمـــا يلـــي:

الوقت المبكر لبداية كل نشاط

النشاط		الوقت المبكر للبداية
النشـــاط	A	الوقت المبكر لبدايته = 0
النشـــاط	B	الوقت المبكر لبدايته =0+6 =6
النشـــاط	C	الوقت المبكر لبدايته =6+20 =26
النشـــاط	D	الوقت المبكر لبدايته =0
النشاط	E	الوقت المبكر لبدايته =0+20 =20
النشـــاط	F	الوقت المبكر لبدايته =0
النشـــاط	G	الوقت المبكر لبدايته =0+6 =6
النشـــاط	H	الوقت المبكر لبدايته =6+20 =26

جدول14-3

تدون هذه الأرقام في الجزء الأيسر من القمة التي تمثل الحدث على الشبكة (انظر الشكل14-13).

ملاحظة: الوقت المبكر لبداية النشاط المفترض أن يلي الأنشطة H,E,C هو الأكبر بين:

44 = (30=4+26 ، 44=24+20 ، 38=12+26)

و هذه المدة تعبر في نفس الوقت عن آخر وقت لإنجاز هذه الأنشطة و عن وقت نهاية المشروع.

3- الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط: هو آخر وقت ينبغي أن ننتهي فيه النشاط، و تحسب أيضا على الشبكة في مرحلة الإياب، بحيث نراعي أن **الوقت الذي ينتهي فيه المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية آخر نشاط زائدا مدة تنفيذ هذا النشاط**، و حيث يكون في آخر قمة الوقت المبكر للبداية مساويا الى الوقت المتأخر للنهاية.

الوقت المتأخر لنهاية كل نشاط

النشاط		الأوقات المتاخرة		
النشاط	C	الوقت المتأخر لنهايته	44=	
النشاط	B	الوقت المتأخر لنهايته	12-44=	32=
النشاط	A	الوقت المتأخر لنهايته	20-32=	12=
النشاط	E	الوقت المتأخر لنهايته	44=	
النشاط	D	الوقت المتأخر لنهايته	24-44=	20=
النشاط	H	الوقت المتأخر لنهايته	44=	
النشاط	G	الوقت المتأخر لنهايته	4-44=	40=
النشاط	F	الوقت المتأخر لنهايته	20-40=	20=

جدول14-4

تدون هذه الأوقات في الجزء الأيمن من القمة التي تمثل الحدث.

و نحصل على الشبكة التالية حيث تظهر الأوقات المبكرة لكل نشاط و الأوقات المتأخرة لكل نشاط.

شكل14-13

و يلاحظ أن الوقت اللازم لإنجاز المشروع هو 44 يوم، كما يظهر عند آخر حدث في المشروع.

4- تدوين الأوقات في الجدول: في جدول المراقبة الزمنية للمشروع تدون الأوقات المبكرة لبداية كل نشاط و الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط و المحصل عليها انطلاقا من الحسابات الجارية على الشبكة، و بناء عليها يتم حساب الأوقات المبكرة لنهاية كل نشاط و الأوقات المتأخرة لبداية كل نشاط إضافة الى وقت السماح الكلي، كما تم تعريف ذلك سابقا، و عليه فإن جدول المراقبة الزمنية للمشروع يكون على النحو التالي:

جدول المراقبة الزمنية للمشروع

اسم النشاط	الأنشة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		السماح الكلي	النشاط الحرج
			للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية		
A	-	6	0	6	6	12	6	-
B	A	20	6	26	12	32	6	-
C	B	12	26	38	32	44	6	-
D	-	20	0	20	0	20	0	حرج
E	D	24	20	44	20	44	0	حرج
F	-	6	0	6	14	20	14	-
G	F	20	6	26	20	40	14	-
H	G	4	26	30	40	44	14	-

جدول14-5

يلاحظ أن الجدول يحتوي على جميع الأوقات التي تسمح بمراقبة تنفيذ المشروع، كما يظهر النشاطين الحرجين الذين على أساسهما تتحدد مدة تنفيذ المشروع بكامله، و هما النشاطين D, E اللذان يتطلبان عناية خاصة و صرامة في إحترام وقت تنفيذهما، إذ أن أي تأخر في تنفيذهما سوف يؤدي الى إطالة مدة تنفيذ المشروع بقدر ذلك التأخر، و على سبيل المثال لو تأخر إنجاز النشاط E بيوم واحد لأدى ذلك الى تأخر مدة تنفيذ المشروع بيوم واحد ليستلم بعد 45 يوم بدل 44 يوم.

مثال14-4: الجدول التالي يظهر 13 نشاطا رئيسيا لإنجاز مشروع ما، و كذلك المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأيام.

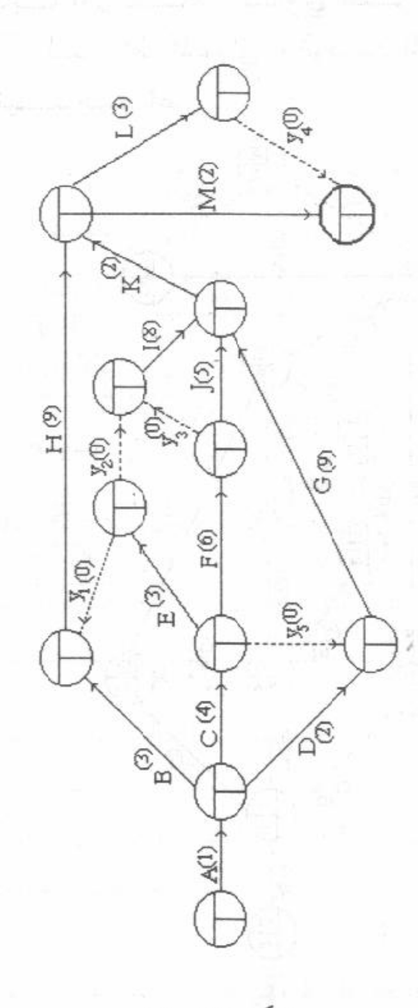
اسم النشاط	الأنشطة السابقة	المدة اللازمة لتنفيذ النشاط
A	-	1
B	A	3
C	A	4
D	A	2
E	C	3
F	C	6
G	C,D	9
H	B,E	9
I	E,F	8
J	F	5
K	I,J,G	2
L	H,K	3
M	H,K	2

جدول14-6

المطلوب:

- رسم شبكة الأعمال.
- حساب الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة، و الأوقات المتأخرة لنهاية الأنشطة على الشبكة.
- إيجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع.
- تحديد الأنشطة الحرجة و تحديد مدة إنجاز المشروع.

1- **رسم الشبكة:** نقوم برسم الشبكة بنفس المبادئ التي تم التطرق إليها، مع الانتباه الى ضرورة إضافة بعض الأنشطة الخيالية مراعاة لترتيب الأنشطة، حيث تكون مدة تنفيذها معدومة، و عليه تكون الشبكة كما يلي:

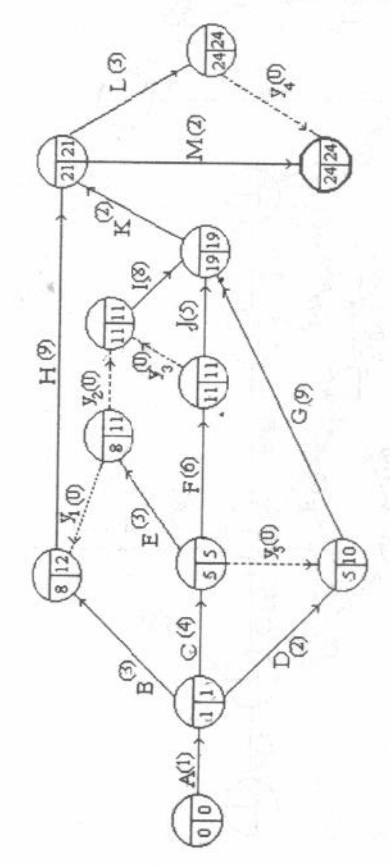


شكل 14-14

2- حساب الأوقات:

مرحلة الذهاب: و نحسب فيها الوقت المبكر لبداية كل نشاط، بحيث نضع:

- الوقت المبكر لبداية أول نشاط يساوي صفر.
- الوقت المبكر للنشاط الموالي = الوقت المبكر للنشاط السابق+ مدة تنفيذ النشاط.



شكل14-15

و عليه فإن الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة الموضوعة في الجانب الأيسر من القمة تم حسابها كما يلي:

الأوقات المبكرة لبداية الأنشطة

النشاط	الأوقات المبكرة للبداية
النشاط A	الوقت المبكر لبدايته = 0
النشاطB	الوقت المبكر لبدايته =0+1=1
النشاط C	الوقت المبكر لبدايته =0+1=1
النشاطD	الوقت المبكر لبدايته =0+1=1
النشاط E	الوقت المبكر لبدايته =1+4=5
النشاطF	الوقت المبكر لبدايته =1+4=5
النشاط الخيالي y_5	الوقت المبكر لبدايته =1+4=5
النشاطG	الوقت المبكر لبدايته هو أكبروقت بين [5+0=5 و 1+2=3]=5
النشاط H	الوقت المبكر لبدايته هو أكبروقت بين:[8+0=8 و 1+3=3]=8
النشاط I	الوقت المبكر لبدايته هو أكبروقت بين:[11+0=11 و 8+0=8]=11
النشاط J	الوقت المبكر لبدايته = 5+6=11
النشاط K	الوقت المبكر لبدايته هوأكبروقت بين:[11+8=19 و 11+5=16 و 5+9=14]=19
النشاطL	الوقت المبكر لبدايته هوأكبروقت بين:[19+2=21 و 8+9=17]=21
النشاط M	الوقت المبكر لبدايته هو أكبر وقت بين:[19+2=21 و 8+9=17]=21
النشاط الخيالي y_4	الوقت المبكر لبدايته =21+3=24و منه فإن الوقت المبكر لنهاية المشروع هو24

جدول14-7

لاحظ أنه بالنسبة للأوقات المبكرة لبداية الأنشطة G,H,I,K,L,M أننا أخذنا أكبر وقت محسوب بين الأوقات المبكرة للأنشطة السابقة مضافا اليها مدة تنفيذ هذه الأنشطة ودوناها في الشق الأيمن من خانة كل حدث كما يظهر ذلك في الشبكة (شكل14-15).

المرحلة الثانية: مرحلة الإياب: نحسب فيها الأوقات المتأخرة لنهاية الأنشطة.

في آخر قمة نضع الوقت المتأخر لتنفيذ آخر الأنشطة يساوي الى مدة تنفيذ المشروع ويساوي 24 يوم في مثالنا.

و منه فإن الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط يظهرها الجدول التالي، و تم حسابها تماما كما تم التطرق الى ذلك من قبل، دون إهمال الأنشطة الخيالية المساعدة التي اعتبرنا زمن تنفيذها معدوم.

الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط

النشاط	الأوقات المتأخرة للنهاية
النشاط **M**	الوقت المتأخر لنهايته =24
النشاط **L**	الوقت المتأخر لنهايته =24-0=24
النشاط **H** و **K**	الوقت المتأخر لنهايتهما هو أقل قيمة بين: [24-3=21 و 24-2=22]=21
النشاط **I, J, G**	الوقت المتأخر لنهايتها = 21-2=19
النشاط **F**	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين: [19-5=14 و 11-0=11]=11
النشاط **E**	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين: [11-0=11 و 12-0=12]=11
النشاط **D**	الوقت المتأخر لنهايته = 19-9=10
النشاط **C**	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين: [11-6=5 و 8-3=5 و 10-0=10]=5
النشاط **B**	الوقت المتأخر لنهايته = 21-9=12
النشاط **A**	الوقت المتأخر لنهايته هو أقل قيمة بين: [8-3=5 و 5-4=1 و 10-2=8]=1

جدول6-8

المرحلة الثالثة: إيجاد جدول الأوقات الهامشية و حساب وقت السماح الكلي، و يتم ذلك وفق القواعد أعلاه.

حيث يظهر الجدول التالي كامل الأوقات بما فيها الأوقات المحسوبة على الشبكة مباشرة، كما تتحدد عليه الأنشطة الحرجة.

جدول المراقبة الزمنية للمشروع

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		السماح الكلي	النشاط الحرج
			للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية		
A	-	1	0	1	0	1	0	حرج
B	A	3	1	4	9	12	8	
C	A	4	1	5	1	5	0	حرج
D	A	2	1	3	8	10	7	
E	C	3	5	8	8	11	3	
F	C	6	5	11	5	11	0	حرج
G	C,D	9	5	14	10	19	5	
H	B,E	9	8	17	12	21	4	
I	E,F	8	11	19	11	19	0	حرج
J	F	5	11	16	14	19	3	
K	I,J,G	2	19	21	19	21	0	حرج
L	H,K	3	21	24	21	24	0	حرج
M	H,K	2	21	23	22	24	1	

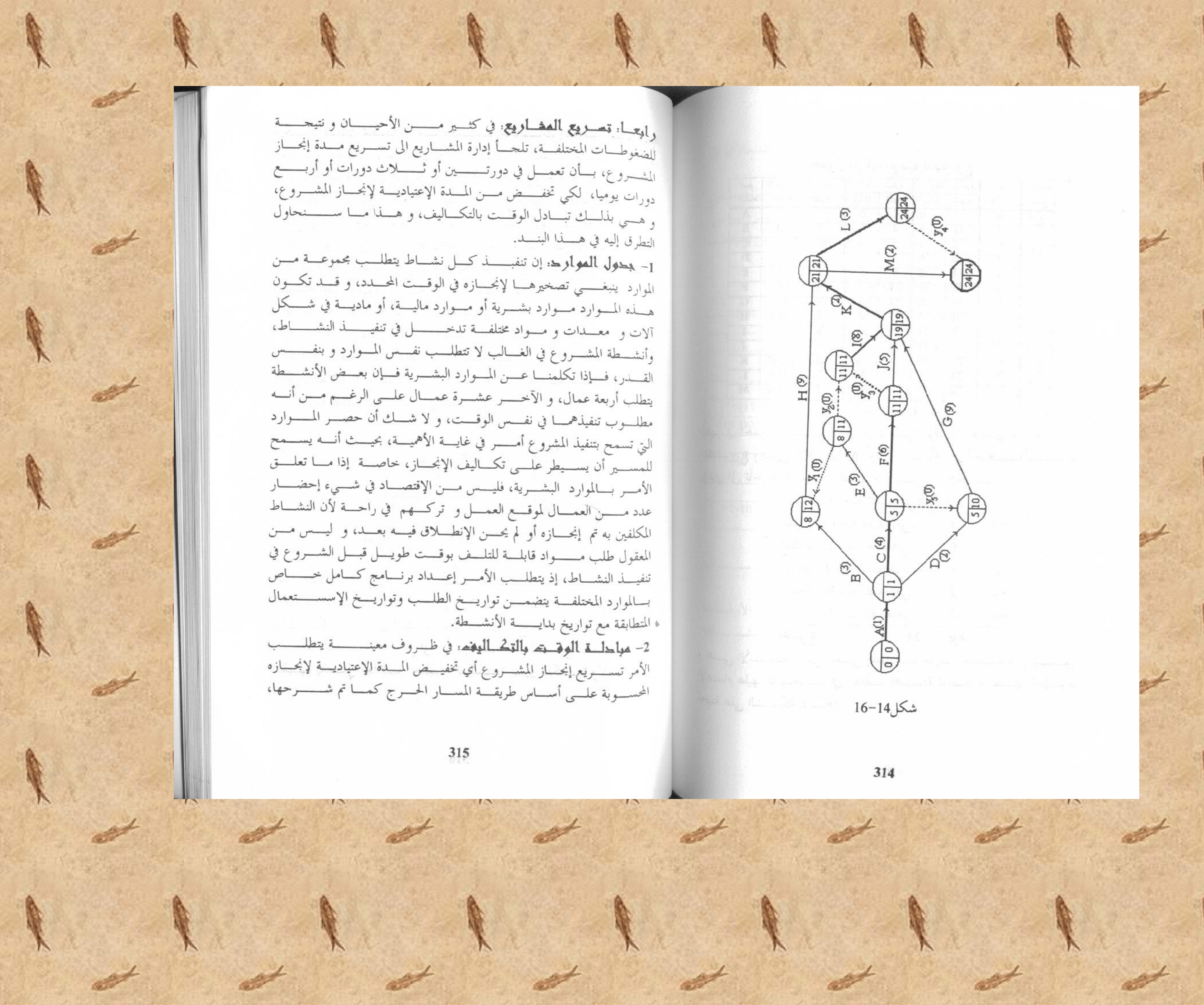
جدول14-9

يظهر في الجدول الأنشطة الحرجة التي تتوقف عليها مدة تنفيذ المشروع وهي A,C,F,I,K,L وأي تأخر في أحدها سوف يؤدي الى تأخر مدة تنفيذ المشروع عن 24، حيث:

النشاط A مدة تنفيذه هي: 1 يوم
النشاط C مدة تنفيذه هي: 4 أيام
النشاط F مدة تنفيذه هي: 6 أيام
النشاط I مدة تنفيذه هي: 8 أيام
النشاط K مدة تنفيذه هي: 2 يوم
النشاط L مدة تنفيذه هي: 3 أيام

المجموع: 24 يوم

و هي الأنشطة التي ينبغي إعطاءها عناية خاصة و تركيز الإهتمام عليها لتنفيذها في آجالها المحددة تماما، و تظهر بخطوط ثخينة على الشبكة أدناه:



شكل14-16

رابعا: تسريع المشاريع: في كثير من الأحيان و نتيجة للضغوطات المختلفة، تلجأ إدارة المشاريع الى تسريع مدة إنجاز المشروع، بأن تعمل في دورتين أو ثلاث دورات أو أربع دورات يوميا، لكي تخفض من المدة الإعتيادية لإنجاز المشروع، و هي بذلك تبادل الوقت بالتكاليف، و هذا ما سنحاول التطرق إليه في هذا البند.

1- جدول الموارد: إن تنفبذ كل نشاط يتطلب مجموعة من الموارد ينبغي تصخيرها لإنجازه في الوقت المحدد، و قد تكون هذه الموارد موارد بشرية أو موارد مالية، أو مادية في شكل آلات و معدات و مواد مختلفة تدخل في تنفيذ النشاط، وأنشطة المشروع في الغالب لا تتطلب نفس الموارد و بنفس القدر، فإذا تكلمنا عن الموارد البشرية فإن بعض الأنشطة يتطلب أربعة عمال، و الآخر عشرة عمال على الرغم من أنه مطلوب تنفيذهما في نفس الوقت، و لا شك أن حصر الموارد التي تسمح بتنفيذ المشروع أمر في غاية الأهمية، بحيث أنه يسمح للمسير أن يسيطر على تكاليف الإنجاز، خاصة إذا ما تعلق الأمر بالموارد البشرية، فليس من الإقتصاد في شيء إحضار عدد من العمال لموقع العمل و تركهم في راحة لأن النشاط المكلفين به تم إنجازه أو لم يحن الإنطلاق فيه بعد، و ليس من المعقول طلب مواد قابلة للتلف بوقت طويل قبل الشروع في تنفيذ النشاط، إذ يتطلب الأمر إعداد برنامج كامل خاص بالموارد المختلفة يتضمن تواريخ الطلب وتواريخ الإستعمال المتطابقة مع تواريخ بداية الأنشطة.

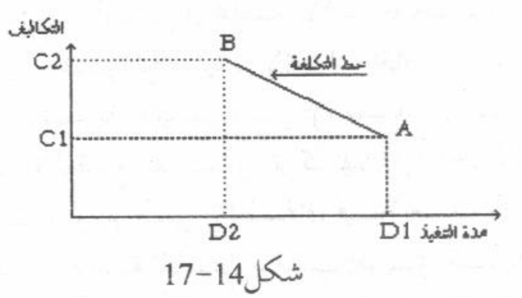
2- مبادلة الوقت بالتكاليف: في ظروف معينة يتطلب الأمر تسريع إنجاز المشروع أي تخفيض المدة الإعتيادية لإنجازه المحسوبة على أساس طريقة المسار الحرج كما تم شرحها،

ويكون ذلك ممكنا إذا ما رصدت إمكانيات إضافية تسمح بتقليص الوقت الإعتيادي للأنشطة، فيتم العمل مثلا بنظام المداومة، مداومتين بثمان ساعات في كل واحدة، أو ثلاث مداومات أو أربع أي العمل بنظام أربع و عشرون ساعة على أربع و عشرون ساعة، و لاشك أن ذلك يتطلب مضاعفة التكاليف، و وسائل و مواد الإنجاز، مقابل تقليص مدة الإنجاز، و هذا ما يتم العمل به في الكثير من الإنشاءات المعمارية، ويصطلح على ذلك مبادلة الوقت بالتكاليف.

و بناء على هذا فإنه يمكن الكلام على:

- زمن عادي مقابل تكلفة عادية.
- زمن متسرع مقابل تكلفة متسرعة.

و تكون العلاقة بين الزمن و التكلفة علاقة خطية عكسية ميلها سالب كما يظهر من الشكل الموالي:



شكل14-17

باعتبار التكلفة دالة في زمن التنفيذ، فلاحظ أنه عند التكلفة C_1 كانت مدة تنفيذ النشاط هي D_1 أي النقطة A و عندما بادلنا الوقت بالتكلفة، أي أضفنا التكلفة لتصبح C_2 فإن مدة تنفيذ النشاط إنخفضت لتصل الى D_2 و حصلنا على النقطة B، **وتظهر بالتالي العلاقة الخطية العكسية بين التكلفة و زمن.**

التنفيذ، **ميل هذه العلاقة يظهر لنا نسبة أثر تخفيض وحدة زمنية** واحدة على التكلفة، أي:

$$\frac{C_1 - C_2}{D_1 - D_2}$$

و يعني هذا أن ميل خط التكلفة عبارة عن نسبة الفرق بين التكلفة المتسرعة و التكلفة العادية و الفرق بين الزمن المتسرع والزمن العادي.

ميل خط التكلفة = (التكلفة المتسرعة ـ التكلفة العادية) / (الزمن المتسرع ـ الزمن العادي)

و يعكس ميل خط التكلفة الزيادة المتوقعة في التكلفة الإجمالية إذا ما قمنا بتخفيض مدة الإنجاز بوحدة زمنية واحدة لذلك **يأخذ إشارة سالبة.**

فهو يعبر عن العلاقة بين الوقت و التكلفة لأي نشاط إذا ما أريد مبادلة الوقت بالتكاليف.

و مبادلة الوقت بالتكاليف لا بد أن يرعى فيه بأن تكون زيادة التكاليف في أدنى المستويات، و لأجل ذلك يتم تخفيض مدة الأنشطة الحرجة التي يكون فيها هذا الميل أقل ما يمكن، حيث يخفض وقت تنفيذ النشاط حينئذ بوقت التخفيض المتاح لذلك النشاط، و يعاد من جديد حساب الأوقات، و تحديد المدة الجديدة لتنفيذ النشاط، حيث نحصل على مسار حرج جديد وتكلفة جديدة أكبر من التكلفة العادية، و يمكن تلخيص خطوات التسريع كما يلي:

1- إيجاد جدول المراقبـة الزمنية العاديـة، و تحديـد زمـن تنفيذ المشروع و تكلفتـه الإجمالية.

2- حساب التكلفة المترتبة عن تخفيض مدة كل نشاط.

3- تخفيض مـدة تنفيـذ المشـروع بتخفيـض أكـبر قـدر من مدة تنفيـذ أحـد الأنشـطة الحرجـة الـتي يكـون فيها ميـل خـط علاقـة الوقـت بالتكلفـة أقـل مـا يمكن، و نقـوم بنفـس الشـيء إذا كـان هنـاك أكـثر من مسار حـرج.

4- نختبر فيما إذا كـانت مـدة تنفيـذ المشـروع الجديـدة لا يمكـن تخفيضـها لإستنفاذ كـل الوقـت المتـاح لتنفيذ الأنشـطة الحرجـة.

5- نحـدد المسـار الحـرج الجديـد باسـتخدام الأوقـات الجديدة للأنشـطة المترتبـة عـن التخفيـض الـذي تم في الخطوة 3، ثم نعـود الى الخطـوة3.

مثـال14-5: الجـدول التـالي يظـهر الأنشـطة الأساسـية لإنجـاز أحد المشـاريع الإنشائية، و المـدة و التكلفـة العـاديتين لتنفيـذ كـل نشاط، كما يظهر المدة و التكلفـة المتسـرعتين لكـل نشـاط.

المدة بالأشهر. التكاليف بآلاف الدينارات.

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة
A	-	7	30	4	45
B	-	5	10	3	16
C	-	4	20	4	20
D	A	6	18	5	25
E	C	7	40	5	50
F	B, E	8	25	6	35
G	C	4	30	4	30
H	B,E	6	15	6	15
I	D,F	5	18	3	20
J	H,G	6	24	4	30

جدول14-10

المطلـوب:

1- رسم شـبكة الأعمـال

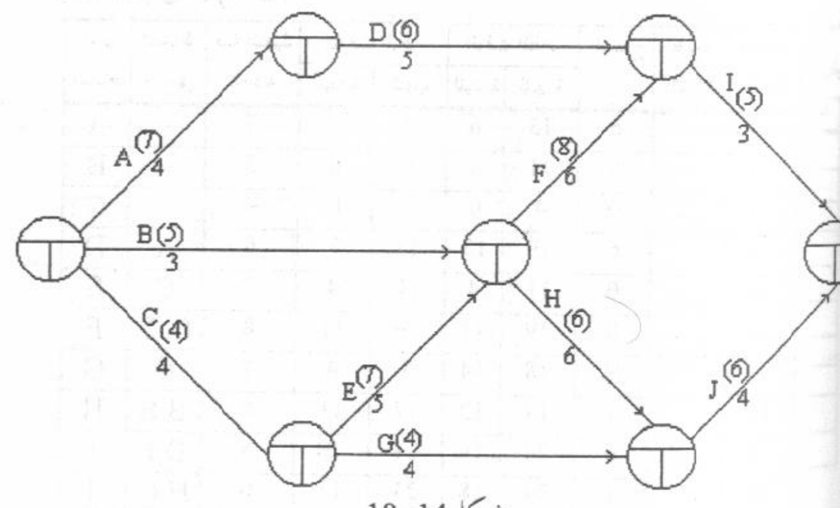
2- إيجاد جـدول الأوقـات

3- تحديد مـدة تنفيـذ المشـروع العاديـة و تكلفـة إنجـازه مـع تحديد المسار الحـرج.

4- إيجاد جدول الأوقات المتسرعة و تحديد مدة و تكلفة التنفيذ المتسرعة.

الإجابـات:

1- **رسم الشبكة:** باستخدام قواعد الرسم كما تم تقديمها في أحد البنـود السسابقة نحصل على شبكة الأعمال التالية:

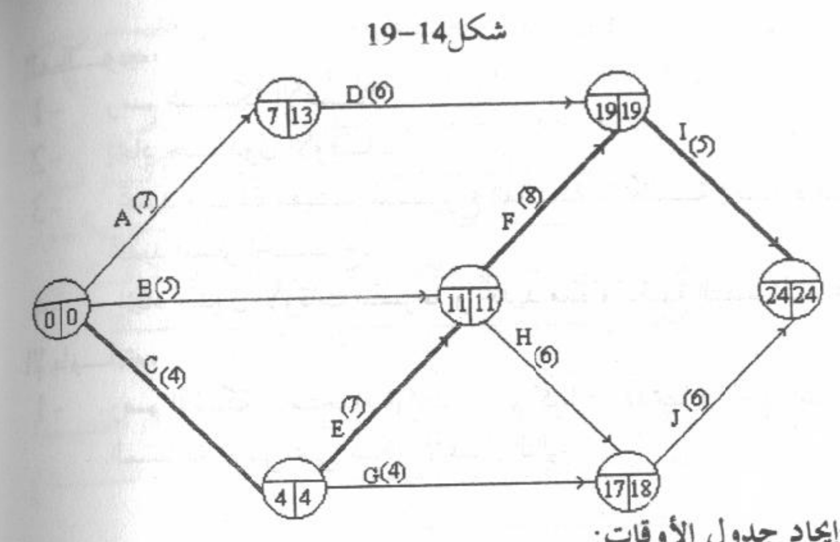


شكل14-18

يظهر في الشـبكة وقتـين، الوقـت العـادي موضـوع بـين القوسـين أعلى السهم، بينما الوقـت المتسـرع موضـوع أسـفل السـهم الـذي يمثل النشـاط.

2- حسـاب الأوقـات المبكـرة للبدايـة و الأوقـات المتـأخرة للنهاية؛ و يتم ذلك على الشـبكة و هـي كمـا يلـي:

شكل14-19



3-إيجاد جدول الأوقات:

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	الوقت المبكر		الوقت المتأخر		السماح	طبيعة النشاط	التكلفة العادية
			للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية			
A	-	7	0	7	6	13	6		30
B	-	5	0	5	6	11	6		10
C	-	4	0	4	0	4	0	حرج	20
D	A	6	7	13	13	19	6		18
E	C	7	4	11	4	11	0	حرج	40
F	B, E	8	11	19	11	19	0	حرج	25
G	C	4	4	8	14	18	10		30
H	B,E	6	11	17	12	18	1		15
I	D,F	5	19	24	19	24	0	حرج	18
J	H,G	6	17	23	18	24	1		24
مجموع التكاليف									230

جدول14-11

3- من الشبكة و الجدول نجد:

- مدة تنفيذ المشروع العادية هي **24 شهر** ، الأنشطة الحرجة هي : **C, E, F,** I

تكلفة إنجاز المشروع العادية هي 230 ألف دينار.

4- تسريع المشروع: بتفحص جميع مسارات الشبكة وحصر زمن التنفيذ العادي و زمن التنفيذ المتسرع نجد:

جدول أزمنة المسارات

المسار	زمن التنفيذ العادي	زمن التنفيذ المتسرع
A,D,I	18	12
B,F,I	18	12
B,H,J	17	13
C,E,F,I	24	18
C,E,H,J	23	19
C,G,J	14	12

جدول14-12

يفيدنا هذا الجدول في تحديد المدة القصوى لتخفيض النشاط الذي نريد تسريعه.

نقوم بعد هذا بحساب ميل التكلفة لكل نشاط، و تظهر في الجدول الموالي:

اسم النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة
A	7	30	4	45	5-
B	5	10	3	16	-
C	4	20	4	20	0
D	6	18	5	25	7-
E	7	40	5	50	5-
F	8	25	6	35	5-
G	4	30	4	30	0
H	6	15	6	15	0
I	5	18	3	20	1-
J	6	24	4	30	3-

جدول14-13

بأخذ المسار الحرج و هو:

C, E, F, I حيث نحدد ميل التكلفة لكل نشاط منه ملخصا في الجدول أدناه:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

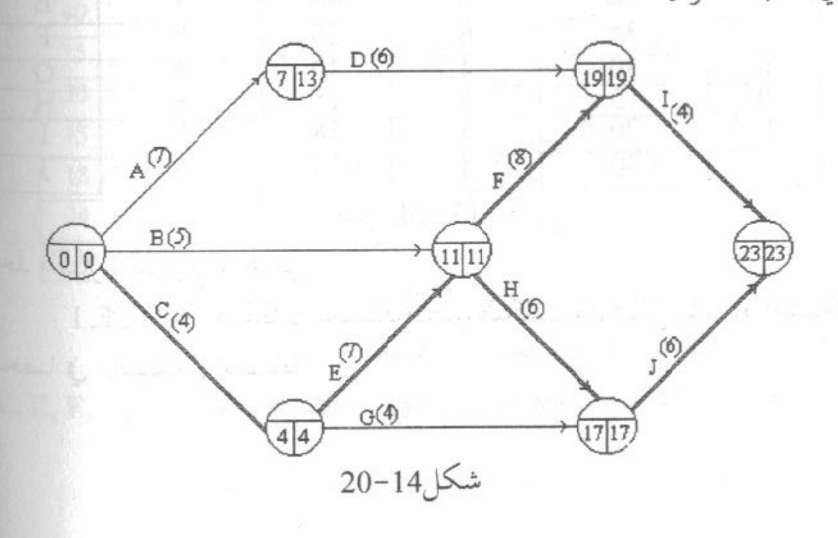
النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
F	8	25	6	35	5-	
I	5	18	3	20	1-	الأقل ميل/مرشح للتخفيض

جدول14-14

من الجدول نجد أن النشاط الذي له أقل ميل هو النشاط I، لذلك نخفضه بأكبر مدة ممكنة، و بالعودة الى جدول أزمنة المسارات أعلاه نجد أن الزمن الذي يلي زمن المسار الحرج هو 23 شهر، و بالتالي فإنه لا يمكننا تخفيض مدة هذا النشاط سوى بشهر واحد، لتصبح مدته 4أشهر وتزداد تكلفته بوحدة واحدة أي بألف دينار لتنتقل من 18 ألف دينار الى 19 ألف دينار.

و النتيجة هي أن تصبح مدة تنفيذ المشروع 23 شهر بدل 24، و تنتقل التكلفة من 230 ألف دينار الى 231 ألف دينار.

بعد التخفيض يصبح لنا الآن أكثر من نشاط حرج، كما يظهر في الشبكة الموالية:



شكل14-20

ظهر لنا مساران حرجان جديدان هما:

- المسار الأول (الأصلي): C,E,F,I
- المسار الجديد: C,E,H,J

نوجد من جديد جدول أزمنة المسارات بعد تخفيض مدة النشاط I بشهر واحد، ثم نقارن ميل التكاليف لأنشطة المسارين الحرجين:

جدول أزمنة المسارات
بعد تخفيض مدة النشاط I بشهر واحد

المسار	زمن التنفيذ العادي	زمن التنفيذ المتسرع	المدة المخفضة
A,D,I	17	12	1
B,F,I	17	12	1
B,H,J	17	13	-
C,E,F,I	23	18	1
C,E,H,J	23	19	-
C,G,J	14	12	-

جدول14-15

نعيد مقارنة ميل التكاليف للأنشطة الحرجة من خلال الجدولين التاليين:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة
للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
F	8	25	6	35	5-	
I	4	19	3	20	1-	الأقل ميل

جدول14-16

لاحظ أن مدة تنفيذ النشاط I صارت 4 و تكلفة إنجازه ارتفعت من 18 الى 19ألف دينار.

من الجدول يظهر أن النشاط I لازال قابلا للتخفيض و بمدة شهر واحد و المدة هنا لم تعد محكومة بثاني مسار من حيث المدة لكنها محكومة بمدة التنفيذ المتسرعة، أي أن مدة تنفيذ هذا النشاط لايمكنها أن تقل عن 3 أشهر، و كنا قد خفضناها من 5 الى 4 أشهر و نوصلها الآن الى 3 أشهر و لايمكن أن نخفضها عن هذه المدة، و ترتفع تكلفته من 19 الى 20 ألف دينار.

ننتقل الآن الى جدول مقارنة ميل التكلفة للنشاط الحرج الثاني:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
H	6	15	6	15	0	يهمل
J	6	24	4	30	3-	الميل الأقل/يسرع بشهر

جدول14-17

يلاحظ أن النشاط J هو الأقل من حيث ميل التكلفة، لذلك نخفضة بشهر واحد، لتصبح مدة تنفيذه 5 أشهر و يصبح طول المسار الحرج 22 شهر، و ترتفع تكلفة إنجازه من 24 الى 27 ألف دينار.

و نتيجة للتخفيض في مدة تنفيذ النشاطين I و J تزداد التكلفة الكلية من 231 الى 235 أي (231+1+3)

و يبقى لنا نفس المسارين الحرجين، كما يظهر في الشبكة الموالية:

شكل14-21

غير أن مدة التنفيذ إنخفضت الى 22 شهر.

ننتقل الى مقارنة ميل التكلفة لأنشطة المسارين الحرجين من جديد:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
F	8	25	6	35	5-	يختار
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسرع	

جدول14-18

بما أن النشاطين E و F لهما نفس الميل لذلك نختار أحدهما و ليكن النشاط F، حيث تصبح مدة تنفيذه 7 أشهر بدل 8أشهر، و تنتقل تكلفة إنجازه من 25 الى 30 ألف دينار.

أما بالنسبة للمسار الحرج الثاني:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
H	6	15	6	15	0	يهمل
J	5	27	4	30	3-	يختار

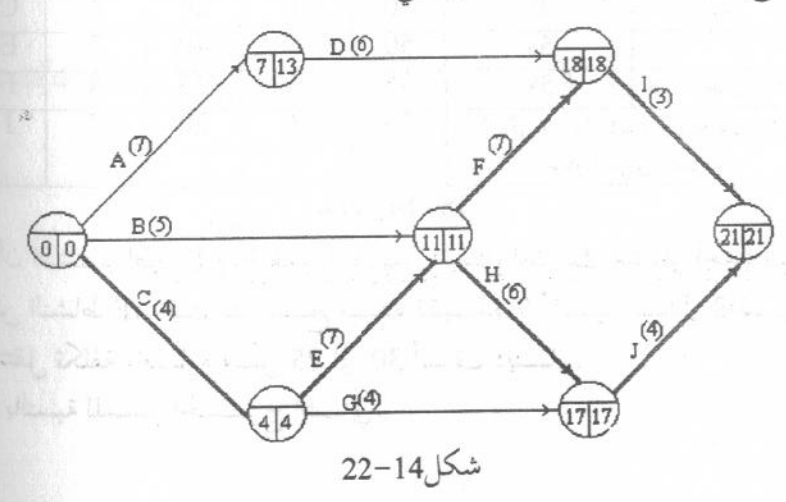
جدول14-19

نجد أن النشاط J يقابله أقل ميل لذلك نخفضه بشهر واحد، فتصبح مدة تنفيذه 4أشهر بدل 5 أشهر و ترتفع تكلفة إنجازه الى 30 بدل 27 ألف دينار.

و النتيجة هي أن تخفيض مدة النشاط F أدى الى زيادة التكلفة بـ 5 ألف دينار، بينما تخفيض مدة تنفيذ النشاط J بشهر واحد أدى الى زيادة التكلفة بـ 3ألاف دينار، أي أن التكلفة الإجمالية ستصبح: 235+8=243 ألف دينار.

أما مدة تنفيذ المشروع فصارت 21 شهر.

و تصبح الشبكة الجديدة كما يلي:



شكل14-22

و بالمثل نستمر في الإختبار:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
F	7	30	6	35	5-	
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسرع	

جدول14-20

نخفض E بشهر واحد، و ترتفع التكلفة بـ 5 ألاف دينار، لتصبح 50 ألف دينار.

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

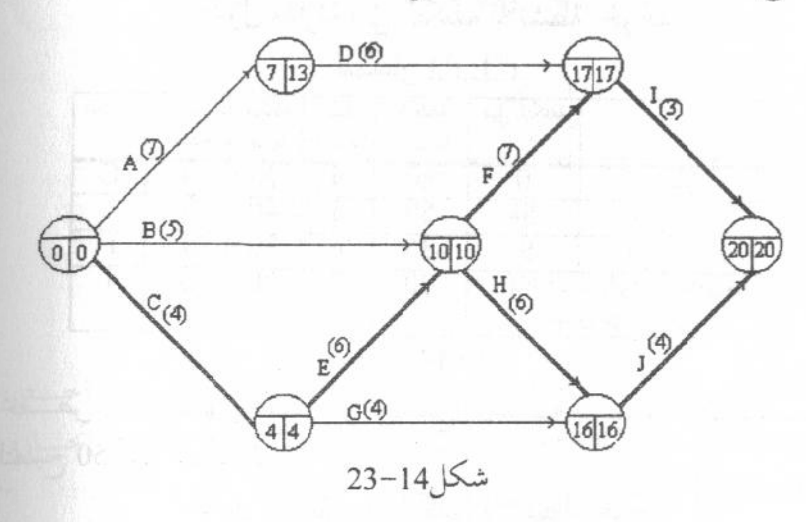
النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	7	40	5	50	5-	
H	6	15	6	15	0	يهمل
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار يساويا للزمن المتسرع	

جدول14-21

يبقى على هذا المسار النشاط E نخفضه بيوم واحد ، و ترتفع التكلفة بـ 5 ألاف دينار فتصبح 45 ألف دينار ، و يصبح طول المسار الحرج 20 شهرا.

لاحظ أن النشاط E نشاطا مشتركا بين المسارين الحرجين، لذلك فإن التخفيض في المدة يكون واحدة و الزيادة في التكلفة تكون أيضا واحدة، و تصبح التكلفة الجديدة هي: 243+5=248 ألف دينار.

و تصبح الشبكة الجديدة كمـــــا يلــي:



شكل14-23

نكرر العملية أيضــــا:

و من خلال الجدولــــين:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	6	45	5	50	5-	
F	7	30	6	35	5-	
I	3	20	3	20	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسرع	

جدول14-22

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

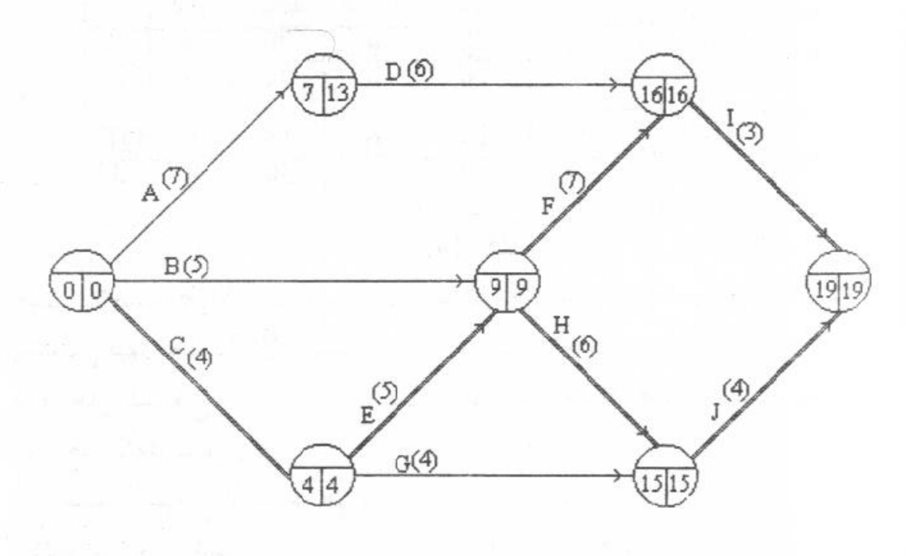
للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	6	45	5	50	5-	
H	6	15	6	15	0	يهمل
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسرع	

جدول14-23

نرشح ثانيـــــة النشـــاط E للتقليـــص بشهـــر واحـــد، ليصبـــح 5 أشـــهر وهي مدة مساوية للمـــدة المتســرعة، و ترتفـــع التكلفـــة بـــ5 فتصبـح مدة تنفيذه 50 ألـــف دينـــار بـــدل 45 ألـــف دينـــار، لتصبـــح التكلفـــة الكلية 253 الف دينار، و طـــول المســـار الحـــرج 19 شـــهر.

و تصبح الشبكة المتســـرعة الجديـــدة هـــي:



شكل14-24

نقارن من جديد ميل التكاليف للأنشطة الحرجة من خلال الجدولين التاليين:

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,F,I

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	5	50	5	50	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار مساويا للزمن المتسرع	
F	7	30	6	35	تم تسريعه بشهر	
I	3	20	3	20	لا يمكن نسريعه لأن الزمن العادي صلر مساو للزمن المتسرع	

جدول14-24

جدول مقارنة ميل التكلفة للأنشطة الحرجة

للمسار C,E,H,J

النشاط	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة	ميل التكلفة	
C	4	20	4	20	0	يهمل
E	5	50	5	50	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صلر مساو للزمن المتسرع	
H	6	15	6	15	0	يهمل
J	4	30	4	30	لا يمكن تسريعه لأن الزمن العادي صار يساويا للزمن المتسرع	

جدول14-25

حيث نلاحظ الآن أن كل الأنشطة الحرجة تم تسريعها، لدرجة يستحيل فيها بعد الآن تسريع أي نشاط آخر يؤدي الى تخفيض مدة إنجاز المشروع عن 19 شهرا، و بذلك فإن هذا الحل يعتبر هو الحل الأمثل، أي:

مدة تنفيذ المشروع المتسرعة هي: 19 شهر

تكلفة المشروع المتسرعة هي: 253 ألف دينار.

و بذلك يمكن إيجاد جدول المراقبة الزمنية المتسرعة و هو كما يلي:

جدول المراقبة الزمنية المتسرعة

النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ بعد التسريع	الوقت المبكر للبداية	الوقت المبكر للنهاية	الوقت المتأخر للبداية	الوقت المتأخر للنهاية	السماح	طبيعة النشاط	التكلفة بعد التسريع
A	-	7	0	7	3	10	3		30
B	-	5	0	5	4	9	4		10
C	-	4	0	4	0	4	0	حرج	20
D	A	6	7	13	10	16	9		18
E	C	5	4	9	4	9	0	حرج	50
F	B, E	7	9	16	9	16	0	حرج	30
G	C	4	4	8	11	15	7		30
H	B,E	6	9	15	9	15	0	حرج	15
I	D,F	3	16	19	16	19	0	حرج	20
J	H,G	4	15	19	15	19	0	حرج	30
مجموع التكاليف									253

جدول14-26

و يلاحظ أنه تم إختزال خمسة أشهر كاملة، فبعد أن كانت مدة التنفيذ 24 شهر صارت 19 شهر، غير أن هذا الإختزال كان نتيجة لزيادة النفقات، إذ تم إستبدال الخمسة أشهر تلك بـ 23 ألف دينار، إذ انتقلت التكلفة من 230 الى 253 ألف دينار، أي أن معدل الإحلال يبلغ 4.6 ألف دينار زيادة عن كل شهر مختزل.

تمارين.

تمرين1: اعط تعريفا لشبكة الأعمال.

تمرين2: حدد أهمية و فوائد طريقة المسار الحرج.

تمرين3: اعط تمرينا تصوريا لمشروع بناء مصنع، مفصلا فيه الأنشطة ومدد إنجازها، ثم قم برسم شبكة المشروع و أوجد جميع الأوقات و حدد الأنشطة الحرجة و مدة إنجازه.

تمرين4: لإنجاز مستودع قامت المؤسسة المكلفة بانجازه الى تجزئة هذا المشروع الى 10 أنشطة، مدة تنفيذ كل نشاط ومنطقية تتابع الأنشطة مبينة في الجدول التالي:

المدة بالأشهر، التكلفة بآلاف الدينارات

رمز النشاط	الأنشطة	الأنشطة السابقة	مدة النشاط العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة
A	الحصول على مخطط المشروع	–	12	120	6	240
B	تحضير الأرضية	–	6	60	3	120
C	طلب لوازم البناء	A	3	30	1.5	60
D	حفر الأسس	A,B	3	30	1.5	60
E	طلب الأبواب و النوافذ	A	6	60	3	120
F	تسليم اللوازم	C	6	60	3	120
G	وضع الأسس	D,F	6	60	3	120
H	تسليم الأبواب و النوافذ	E	30	300	15	600
I	وضع الجدران و الأسقف	G	12	120	6	240
J	تركيب الأبواب و النوافذ	H,I	3	30	1.5	60

المطلوب:

1- كون شبكة المشروع.

2- أوجد جدول المراقبة الزمنية العادية و حدد المسار الحرج، و المدة العادية لتنفيذ المشروع و كلفة الإنجاز العادية.

3- أوجد جدول الأوقات المتسرعة و حدد مدة و تكلفة التنفيذ المتسرعة.

تمرين5: الجدول التالي يظهر الأنشطة اللازمة لإنجاز أحد المشاريع، إضافة الى المدة العادية و المتسرعة و التكلفة العادية والمتسرعة لإنجاز كل نشاط.

اسم النشاط	النشاط السابق	مدة التنفيذ العادية	التكلفة العادية	المدة المتسرعة	التكلفة المتسرعة
A	-	20	400	10	1200
B	-	14	280	7	500
C	-	24	480	12	750
D	A	30	600	15	850
E	A	15	300	8	500
F	B	10	200	5	400
G	D,C	10	200	5	650
H	E	15	300	8	450

المطلوب:

4- كون شبكة المشروع.

5- أوجد جدول المراقبة الزمنية العادية و حدد المسار الحرج، و المدة العادية لتنفيذ المشروع و كلفة الإنجاز العادية.

6- أوجد جدول الأوقات المتسرعة و حدد مدة و تكلفة التنفيذ المتسرعة.

تمرين 6: الجدول التالي يظهر الأنشطة اللازمة لانجاز مشروع ما، و المدة اللازمة لانجاز كل نشاط بالأشهر.

رقم النشاط	اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة النشاط بالأيام
1	استعداد و تجهيز	–	6
2	توريد مواد	–	10
3	الحفر	1	12
4	البناء التحتي	2 و 3	16
5	خرسانة الطابق الأرضي	4	18
6	انضاج خرسانة و فك قوالب الطابق الأرضي	5	12
7	خرسانة الطابق الأول	5	18
8	انضاج خرسانة و فك قوالب الطابق الأول	7	12
9	جدران الطابق الأرضي	6	14
10	جدران الطابق الأول	8 و 9	14
11	تمديد الكهرباء و المياه و المجاري	10	16
12	أطر الأبواب و النوافذ	10	6
13	بياض الطابق الأرضي	11 و 12	12
14	بياض الطابق الأول	13	12
15	تبليط الطابق الارضي	13	12
16	تبليط الطابق الأول	14 و 15	12

17	تركيب الأبواب و النوافذ	16	16
18	التركيبات الكهربائية و الصحية للأرضي	15	18
19	التركيبات الكهربائية و الصحية للأول	16 و 18	18
20	دهان الطابق الأرضي	18	12
21	دهان الطابق الأول	19 و 20	12
22	بياض الواجهات الخارجية	12	30
23	أعمال السطح	7	14
24	توصيلات خارجية	19 و 22	6
25	تجارب و تسليم	21 و 24 و 17 و 23	3
26	اسبوع احتياطي للطوارىء	25	6

المطلوب:

1- ارسم شبكة الأعمال.

2- احسب جميع الأوقات.

3- ماهي مدة تنفيذ المشروع و ما هي أنشطته الحرجة.

الفصل الخامس عشر

أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات P.E.R.T

يستخدم أسلوب تقييم البرامج و مراجعة التقنيات في إيجاد المسار الحرج لتنفيذ الأعمال التي تتصف بعدم التأكد في الأوقات المطلوبة في تنفيذ الأنشطة التي تتكون منها شبكة الأعمال، أي في المشروعات التي تتسم بعدم توافر معلومات أكيدة عن الأوقات المطلوبة لأداء الأنشطة المختلفة، خاصة في مجال البحوث العلمية و المشاريع الجديدة غير المسبوقة بحالات مماثلة.

و من الشروط التي يجب توافرها في المشاريع التي يمكن تحليلها بواسطة أسلوب بيرت ما يلي :

- أن يتكون المشروع من عدد من الأنشطة المحددة تحديدا واضحا.
- يمكن بدء أو توقيف هذه الأنشطة بشكل مستقل عن بعضها و لكن في تتابع معروف.
- أن يكون لهذه الأنشطة ترتيب معين في الأداء.
- يمكن تحديد أوقات إحتمالية لتنفيذ كل نشاط.

أولا: حساب مختلف الأوقات: في مثل هذه المشاريع التي تخضع لظروف عدم التأكد يتم تقدير 3 أنواع من الأوقات لكل نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع و هي:

الوقت المتفائل: و هو أقصر وقت ممكن يمكن أن يتم تنفيذ النشاط خلاله.

الوقت المتشائم: و هو أطول وقت يتم تنفيذ النشاط خلاله.

الوقت الأكثر احتمالا: و هو الوقت الذي يغلب الظن على تنفيذ النشاط خلاله و يقدر بناء على الإستفادة من مشاريع مماثلة تم تنفيذها سابقا.

بناء على هذه الأوقات يتم حساب الوقت المتوقع لتنفيذ أي نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع، و هذا بالإعتماد على المعادلة التالية:

الوقت المتوقع= الوسط الحسابي المرجح للأوقات الثلاثة.

حيث يفترض أن التوزيعات الخاصة بالأوقات المطلوبة لتنفيذ الأنشطة تخضع لأوزان ترجيحية هي:

الأوزان الترجيحية للأوقات	
الوقت	احتمال الحدوث (الوزن)
الوقت المتشائم	1
الوقت الأكثر إحتمالا	4
الوقت المتفائل	1
مجموع الأوزان	6

جدول15-1

إعتمادا على هذه الأوزان فإن الوقت المتوقع لتنفيذ أي نشاط هو الوسط الحسابي المرجح للأوقات الثلاثة و بالتالي يحسب كما يلي:

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{المتشائم} + 4(\text{الأكثر إحتمالا}) + \text{المتفائل}}{6}$$

أي: $$Tés = \frac{Top + 4 \times Tpr + Tpé}{6}$$

فإذا كانت مدد نشاط ما هي:

المدة التفاؤلية Top : 20يوم

المدة الأكثر احتمالا هي Tpr: 30 يوم

المدة التشاؤمية Tpé: 60 يوم

فإن المدة المتوقعة لإنجاز النشاط T és هي:

$$Tés = \frac{20 + 4 \times 30 + 60}{6} = 33.33$$

أي شهر و ثلاثة أيام تقريبا.

بعد أن يتم احتساب الوقت المتوقع لكل نشاط بناء على المعادلة أعلاه، يتم حساب الوقت المتوقع للمشروع بنفس طريقة CPM.

و من المفيد تحديد درجة الثقة لهذا التقدير بالطرق الإحصائية وذلك عن طريق اختبار درجة التغير في تقديرات الأوقات المتفائلة و المتشائمة و مقدار الاختلاف بينها عن الوقت الأكثر احتمالا، فإذا ما وجدنا أن مقدار الاختلاف بين الأوقات الثلاثة كبيرا، فإن ذلك يدل على أن درجة الثقة في التقدير الخاص بالوقت المتوقع سوف يكون ضعيفا.

و يحسب الإنحراف المعياري لكل نشاط كما يلي:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{Tpé - Top}{6}\right)^2}$$

مثال15-1: إذا كان لدينا النشاطين أ و ب و مختلف الأوقات هي:

	النشاط أ	النشاط ب
الوقت المتفائل	4	6
الوقت الأكثر احتمالا	12	10
الوقت المتشائم	14	20

جدول15-2

فإن الوقت المتوقع لإنجاز النشاطين و الإنحراف المعياري للأوقات المتشائمة و المتفائلة لكلا النشاطين يظهر في الجدول التالي:

	النشاط أ	النشاط ب
الوقت المتوقع	$\frac{4+12\times4+14}{6}=11$	$\frac{6+10\times4+20}{6}=11$
الإنحراف المعياري	$\sqrt{\left(\frac{14-4}{6}\right)^2}=1.67$	$\sqrt{\left(\frac{20-6}{6}\right)^2}=2.33$
التباين	2.79	5.43

جدول15-3

يلاحظ أن النشاطين لهما نفس المدة المتوقعة للتنفيذ، غير أن إنحرافيهما المعياريين مختلفين، و من ثم فإننا نقول أن درجة التأكد من تنفيذ النشاط أ في المدة المتوقعة أحسن من درجة التأكد من تنفيذ النشاط ب.

مثال15-2: البيانات التالية خاصة بتنفيذ مشروع عالي المخاطرة و تظهر في الجدول مختلف أوقات تنفيذ الأنشطة التي يتكون منها بالأشهر:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	14	5	2
B	-	21	18	3
C	A	17	14	5
D	B	8	5	2
E	C, D	7	4	1
F	B	30	15	6

جدول15-4

المطلوب:

1-أوجد الأوقات المتوقعة لإنجاز كل نشاط.

2- أوجد الانحراف المعياري و تباين كل نشاط.

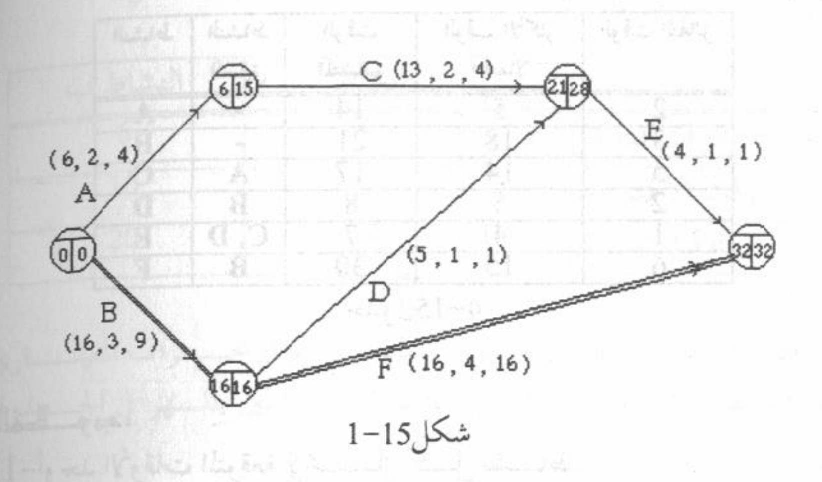
3- ارسم شبكة الأعمال و حدد المسار الحرج.

بتطبيق معادلة الوقت المتوقع و معادلة الانحراف المعياري لكل نشاط نحصل على النتائج المعروضة في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتوقع	الإنحراف المعياري
A	-	6	2
B	-	16	3
C	A	13	2
D	B	5	1
E	C, D	4	1
F	B	16	4

جدول15-5

رسم شبكة الأعمـال وحسـاب الأوقـات عليـها.



شكل15-1

يظهر أمام كل نشاط في الشبكة الوقت المتوقع و الإنحراف المعياري و التباين بالترتيب إبتداء من اليسار، بينما يظهر في كل قمة الوقت المتوقع المبكر للبداية و الوقت المتوقع المتأخر للنهاية كما تم التطرق لهما في طريقة المسار الحرج.

و يظهر لنا الجدول التالي كامل الأوقات المتوقعة الأخرى إضافة الى النشاطين الحرجين.

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	المدة المتوقعة لتنفيذ النشاط	الأوقات المبكرة للبداية	الأوقات المبكرة للنهاية	الأوقات المتأخرة للبداية	الأوقات المتأخرة للنهاية	السماح الكلي	النشاط الحرج
A	-	6	0	6	9	15	9	-
B	-	16	0	16	0	16	0	حرج
C	A	13	6	19	15	28	9	-
D	B	5	16	21	23	28	7	-
E	C, D	4	21	25	28	32	7	-
F	B	16	16	32	16	32	0	حرج

جدول15-6

و يتبين من خلال الشبكة أن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع هو 32 شهر و أن المسار الحرج يحدده النشاطين B و F.

ثانيا: إحتمال تنفيذ المشروع خلال فترة معينة: يتم على الشبكة حساب الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع، غير أن إدارة المشروع قد ترغب في معرفة احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة قد تكون أكبر أو أصغر من الفترة المتوقعة عن طريق الشبكة، لذلك فإنه يتم حساب معامل احتمال تنفيذ المشروع في تلك الفترة و يتم بعد ذلك إستخراج قيمة الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي.

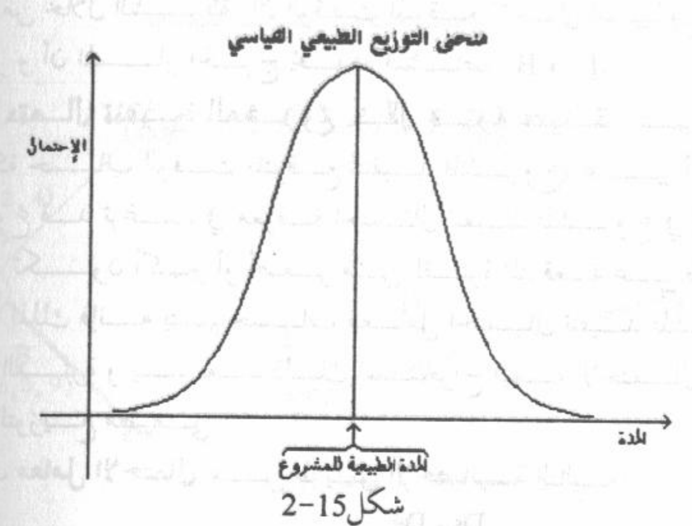
و يحسب **معامل الاحتمال** عن طريق **الإحصائية** التالية:

$$Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma}$$

حيث Ds هي المدة المرغوبة و تسمى أيضا المدة المستهدفة، Dé هي المدة المقدرة، σ الإنحراف المعياري للأنشطة التي تشكل المسار الحرج.

بعد حساب قيمة الإحصائية Z يتم البحث عن الاحتمال المقابل لها ضمن جدول دالة التوزيع الطبيعي القياسي، حيث أن مدة تنفيذ المشروع تخضع لهذا القانون، فلو افترضنا أن المشروع نفذ عددا كبيرا جدا من المرات طبقا لنفس الخطة و تم تسجيل مدد التنفيذ في كل مرة ثم تم رسم المنحنى البياني للعلاقة بين المدة و عدد مرات حصولها لكان هذا المنحنى مماثلا لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي، و الذي تكون المساحة الواقعة تحته مساوية 1 و يكون احتمال إنهاء المشروع في أو قبل أي وقت مساويا للمساحة الواقعة تحت المنحنى من $-\infty$ الى غاية الوقت المحدد.

و معلوم أن منحنى التوزيع الطبيعي القياسي يكون في شكل جرسي كما يظهر في الشكل الموالي:



شكل15-2

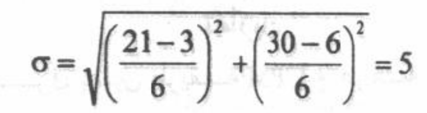
و يحصل على قيمة الاحتمـــال مـــن الجـــدول التـــالي:

Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال	Z	الاحتمال
0	0.5000	1.0	0.8413	2	0.9772	3-	0.0013	2.0-	0.0228	1-	0.1587
0.1	0.5398	1.1	0.8643	2.1	0.9821	2.9-	0.0019	1.9-	0.0287	0.9-	0.1841
0.2	0.5793	1.2	0.8849	2.2	0.9861	2.8-	0.0026	1.8-	0.0359	0.8-	0.2119
0.3	0.6179	1.3	0.9032	2.3	0.9893	2.7-	0.0053	1.7-	0.0446	0.7-	0.2420
0.4	0.6554	1.4	0.9192	2.4	0.9918	2.6-	0.0047	1.6-	0.0548	0.6-	0.2743
0.5	0.6915	1.5	0.9332	2.5	0.9938	2.5-	0.0062	1.5-	0.0668	0.5-	0.3058
0.6	0.7257	1.6	0.9452	2.6	0.9953	2.4-	0.0082	1.4-	0.0808	0.4-	0.3446
0.7	0.7580	1.7	0.9554	2.7	0.9965	2.3-	0.0107	1.3-	0.0968	0.3-	0.3821
0.8	0.7881	1.8	0.9641	2.8	0.9974	2.2-	0.0139	1.2-	0.1151	0.2-	0.4207
0.9	0.8159	1.9	0.9713	2.9	0.9981	2.1-	0.0179	1.1-	0.1357	0.1-	0.4602
				3	0.9987		0.0228			0	0.500

جدول15-7

مثال15-3: أوجـــد احتمـــال تنفيـــذ المشـــروع المشـــار اليـــه في المثـــال الســـابق في 20 شـــهر، في 30 شـــهر و في 35 شـــهر.

يتم أولا إيجاد الإنحراف المعيـــاري للنشـــاطين الحرجـــين كمـــا يلـــي:



$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{21-3}{6}\right)^2 + \left(\frac{30-6}{6}\right)^2} = 5$$

و يكون احتمـــال تنفيـــذ المشـــروع في الأوقـــات المشـــار اليـــها كمـــا يلـــي:

* احتمال تنفيـــذ المشـــروع في 20 شـــهر:

الإحصائية المقابلة هي: $Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{20-32}{5} = -2.8$

مـــن جـــدول الاحتمـــالات نجـــد أن الاحتمـــال المقـــابل للإحصائيـــة Z=-2.8 هـــو 0.003 أي 0.3% و هـــو احتمـــال ضعيـــف جـــدا.

* احتمال تنفيـــذ المشـــروع في 30 شـــهر:

الإحصائية المقابلة هي: $Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{30-32}{5} = -0.4$

مـــن جـــدول الاحتمـــالات نجـــد أن الاحتمـــال المقـــابل للإحصائيـــة Z=-0.4 هـــــو 0.345 أي 34.5%.

* احتمال تنفيـــذ المشـــروع في 35 شـــهر:

الإحصائية المقابلة هي: $Z = \frac{Ds - Dé}{\sigma} = \frac{35-32}{5} = 0.6$

مـــن جـــدول الاحتمـــالات نجـــد أن الاحتمـــال المقـــابل للإحصائيـــة Z=0.6 هـــــو 0.726 أي 72.6%.

أي أن الاحتمال الأكبر هـــو أن ينفـــذ المشـــروع في مـــدة 35 يـــوم.

تمارين

تمرين1: ما الفرق بين طريقة CPM و طريقة PERT

تمرين2: البيانات التالية تظهر الأنشطة الخاصة بتنفيذ إحدى المشروعات وكذا مدد تنفيذها بالأشهر.

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر إحتمالا	الوقت المتفائل
A	-	5	6	7
B	-	4	5	18
C	A	4	15	20
D	B,C	3	4	5
E	A	16	17	18

المطلوب:

- ارسم شبكة الأعمال.
- حدد الوقت المتوقع لاتمام المشروع، و حدد الأنشطة الحرجة.
- أوجد إحتمال إنجاز المشروع في 20 شهر، في 30 شهر، في 15شهر.

تمرين3: البيانات التالية خاصة بإنجاز مشروع عالي المخاطرة، و تظهر في الجدول التالي مختلف اوقات تنفيذ أنشطته بالأشهر:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر إحتمالا	الوقت المتفائل
A	-	28	10	4
B	A	24	28	10
C	A	14	8	2
D	-	42	24	6
E	D	16	10	4
F	E	60	30	12

المطلوب:

- ارسم شبكة الأعمال.
- حدد الوقت المتوقع لاتمام المشروع، و حدد الأنشطة الحرجة.

- أوجد إحتمال إنجاز المشروع في 50 شهر، في 30 شهر، في 70شهر.

تمرين3: نفس الأسئلة للبيانات التالية:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر إحتمالا	الوقت المتفائل
A	-	4	3	8
B	A	4	1	2
C	B,E	4	2	3
D	-	9	7	7
E	D,I	5	2	3
F	E,J	5	2	3
G	B,E	4	2	3
H	G,F	4	1	2
I	-	10	7	8
J	I	13	10	11
K	J	9	6	7

الفصل السادس عشر
التسيير الأمثل للمخزون

أولا: عموميات حول المخزون: المخزون مصطلح ملازم للتسيير الرشيد للمنشآت الإقتصادية و الإجتماعية و الإدارية، لا يقصد به الإحتفاظ لفترة ما بالمواد الأولية التي تدخل في عمليات الصناعات المختلفة فحسب، بل يشمل كل الكميات من السلع سواء كانت مواد أولية أو مواد نصف مصنعة أو كاملة الصنع و المحتفظ بها لفترة زمنية معينة، لإستخدامها لغرض الحفاظ على وتيرة الإنتاج في المصانع و مواجهة إحتمالات إنخفاض منسوبها و تأثير ذلك على معدلات الإنتاج، أو لضمان التواجد المستمر و المنتظم في الأسواق بالنسبة للمؤسسات التجارية أو لضمان إستمرارية تأدية الخدمات بصفة منتظمة بالنسبة للمؤسسات الخدمية كالمستشفيات و الفنادق وغيرها.

و لاشك أن عملية التخزين مكلفة ماديا، فعملية التخزين لا تقتصر نفقاتها فقط على نفقات الإيداع في المخزن لكنها تتعدى ذلك الى تكاليف توفير الظروف المناسبة للسلعة لتبقى محافظة على خصائصها الفيزيائية و تبقى بالتالي صالحة للإستعمال، فبعض السلع تتطلب توفير ظروف التبريد المناسبة و البعض الآخر يتطلب توفير درجة معينة من الرطوبة و البعض الآخر يتطلب التوظيب و التحريك المستمر...الخ، و كل هذه العمليات مكلفة بدرجة أو أخرى، سواء بسبب العنصر البشري الساهر على عملية التخزين و ما ينجر عن ذلك من أجور، و سواء بسبب الوسائل المادية الأخرى المساعدة كالكهرباء و إهتلاك الأجهزة المستعملة في العملية أو سواء

بالنسبة لنفقات التسيير الأخرى كإعداد الطلبيات و ما ينجر عن ذلك.

و تختلف المواد المخزنة حسب أنواع النشاطات، و من أمثلة ذلك ما يلي:

نوع النشاط	المخزون الرئيسي
الصناعات التحويلية	خامات مختلفة حسب النوع
صناعات استخراجية	اخشاب، حديد، آلات، قطع غيار
نشاطات البناء	إسمنت، حديد، طوب
مؤسسات زراعية	بذور، اسمدة، آلات، قطع غيار
مؤسسات صحية	أدوية، ضمادات، أدوات طبية
مرافق عامة	وقود، معداتن أدوات و عناصر مختلفة
إدارات	ورق، أدوات مختلفة

و التخزين كوظيفة أساسية في المؤسسة يعني أيضا حفظ المنتجات التامة الصنع في المخازن المخصصة لغاية موعد تسليمها حسب العقود المبرمة أو في انتظار البيع، كما يحتفظ أحيانا ببعض الأجزاء و قطع الغيار اللازمة لخدمة المنتج النهائي لحين صرفه تنفيذا لعقود البيع، و عادة ما تلجأ المؤسسة لإيجاد إدارة خاصة بالمخازن هي إدارة المخازن.

ثانيا: إختصاصات إدارة المخازن: لتسيير المخزون بكفاءة عالية تنشأ له عادة إدارة خاصة هي إدارة المخازن، التي يكون من مهامها ما يلي:

- إعداد دليل الأصناف المخزنة و ترتيبها وفق نمط معين.
- إستلام المواد الداخلة للمخزن و فحصها و تحديد مدى مطابقتها للمواصفات المطلوبة.

- التخزين المادي و حماية المواد المخزنة من التلف وتوفير الشروط التقنية لحفظها.
- إمساك سجلات المخزون و الإدارة المستمرة للمواد الداخلة و الخارجة باستمرار و السهر على تسجيلها.

و لعل من بين أهم إختصاصات إدارة المخازن، هي حفظ المخزون و تسييره بأمثلية، حيث عليها أن تتجنب إشكاليتان:

- الأولى و هي الإفاضة في المخزون، و هذا ما يؤدي بها الى تحمل تكاليف زائدة.
- الثانية و هي الإحتفاظ بمستويات دنيا من المخزون، وهذا ما يؤدي بها الى تعريض حلقات الإنتاج الى العطل، إذا كانت المؤسسة إنتاجية، أو الى تعريض مكانتها للخطر في السوق إذا كانت المؤسسة تجارية، و في كلا الحالتين تعرض نفسها للخسارة.

و يظهر من كل ما سبق أن المخزون من الناحية القيمية هو حجز جزء من أموال المؤسسة عن التداول، بغية أن تخلق لها مداخيل في المستقبل، بفعل السماح باستمرارية الإنتاج أو استمرارية تواجد المؤسسة في السوق.

و لتسهيل أعمال إدارة المخازن في ظل التطور التقني، لا بد من اللجوء الى البرامج المعلوماتية و إستخدام أجهزة الإعلام الآلي.

ثالثا: نظم التخزين: يتم العمل بأحد النظامين التاليين أو كلاهما معا:

1- نظام المخازن المغلقة: و هو الأعم حيث يتم تخزين الأصناف المختلفة في أماكن مؤمنة لا يسمح بدخولها إلا للعاملين بها، و يكون إستلام الأصناف و صرفها بموجب نظام إداري معين، و أهمية هذا النظام تتجلى في توفير أقصى قدر من الأمان و الرقابة على المواد المخزنة و المصرفة.

2- نظام المخازن المفتوحة: يطبق هذا النظام في صناعات الإنتاج الكبير و المتكرر، حيث يكون الطلب على الأصناف مستمرا و محددا تحديدا دقيقا، حيث تخزن الأصناف في أرفف مهيئة بأماكن أقرب ما يمكن من أماكن سلسلة الإستخدام، بحيث تكون في متناول أي من العاملين في سلسلة الإنتاج المعنية، و عادة ما يلجأ الى هذا النظام لضمان سرعة إنجاز عمليات الإنتاج و ربح الوقت.

رابعا: وظائف المخزون: للمخزون عدة وظائف أساسية منها ما يلي:

1- الموازنة بين العرض و الطلب: يعتبر المخزون وسيلة لموازنة العرض مع الطلب، ففي حالة زيادة الطلب على العرض يلجأ الى سد العجز عن طريق المخزون، و يحدث العكس في حالة ما إذا انخفض الطلب على العرض حيث يلجأ الى إحالة الفائض على المخزون، ليستغل في مراحل لاحقة.

2- الحفاظ على إستمرارية الإنتاج: الكثير من السلع تكون معمرة و بالتالي فهي متواجدة في السوق باستمرار يمكن لإدارة الإنتاج أن تقتنيها في أي وقت تشاء، غير أن بعض السلع الأخرى تكون سريعة التلف و البعض الآخر منها يكون موسمي حيث تظهر بكميات ضخمة خلال موسم الجني، ثم يتناقص تواجدها في السوق، و لضمان تزويد المصنع باستمرار، يلجأ الى شرائها بكميات كبيرة في موسم الجني و تخزينها في ظروف تسمح بالحفاظ على خواصها لإستعمالها عند الطلب، مما يسمح باستمرارية العملية الإنتاجية على مدار السنة.

3- تخفيض تكاليف الإنتاج: سياسة التخزين الناجحة تسمح للمؤسسات الإنتاجية بالإنتاج بكميات كبيرة حتى و إن كان الطلب أقل من الإنتاج و هذا ما يسمح بتخفيض كلفة إنتاج الوحدة المنتجة الواحدة، كما يسمح التخزين من الشراء بكميات كبيرة و هذا ما يخفض من سعر الوحدة المشتراة نتيجة للخصومات بسبب الشراء بكميات كبيرة، إضافة الى انخفاض تكاليف النقل و مختلف النفقات المتعلقة بالتخزين.

4- إرضاء المستهلك: بسبب سياسة التخزين الناجحة فإن السلعة تكون مضمونة التواجد المستمر في السوق و بأسعار معقولة، و هذا ما ينعكس من جهة على سمعة المؤسسة و من جهة أخرى على راحة و رضاء المستهلك.

خامسا: أنواع المخزون: من أنواع المخزون ما يلي:

1- مخزون حجم الطلبية: و هو الموجه لمقابلة طلبات العملاء العادية و يتحدد حجمه تبعا لتكاليف الأوامر و النقل إضافة الى تكلفة الخزن.

2- مخزون الأمان: و يسمى أيضا مخزون عدم التأكد، و يتم إنشاءه لمقابلة الطلب الطارىء غير المتوقع، و تستخدم المؤسسة نوعين من مخزون الأمان، **مخزون الأمان القبلي** و قد يتكون من المواد الأولية الأساسية التي تستخدمها في عملية الإنتاج التي تقوم بها، و يلجأ اليه لمواجهة أي طارىء في التموين بالمواد الأولية، أما **مخزون الأمان البعدي** فيتكون أساسا من منتوجات المؤسسة، و يتم الإحتفاظ به لضمان التواجد الدائم للمؤسسة في السوق، حيث يلجأ اليه عند الزيادة غير المتوقعة للطلب على منتوجات المؤسسة أو عند توقفها عن الإنتاج لأي سبب من الأسباب، و يتحدد حجمه الأمثل

باستخدام بعض العوامل مثل تكلفة التخزين و تكلفة العجز أو الربح الضائع.

3- **المخزون الموسمي:** يُنشأ لمقابلة الطلب الذي يتزايد في أوقات معينة من السنة، فبعض المنتجات يكون إستهلاكها فصلي و الآخر يكون إستهلاكها خلال مواسم دينية ...الخ، و لابد للمؤسسة أن تخطط لتغطية الطلب الزائد خلال هذه المواسم عن طريق تجنيد مخزون كاف، و لتحديد حجم هذا المخزون تلجأ المؤسسة الى وسائل التنبؤ المستقبلي للإستهلاك خلال هذه المواسم عن طريق معطيات سابقة.

سادسا: تكاليف المخزون: تختلف تكاليف المخزون حسب طبيعة المواد المخزنة، غير أنه يمكن تقسيمها الى قسمين هما:

1- **تكاليف الطلبية:** و تتضمن مجمل التكاليف المترتبة على طلب الشراء، كتكلفة إعداد طلب الشراء و إرساله الى المورد أو البائع و تكاليف متابعته، إضافة الى تكاليف الإستلام كالإختبار و الفحص و النقل...الخ

2- **تكاليف التخزين:** و تشمل التكاليف المتعلقة بعملية التخزين في حد ذاتها للمواد، كتكلفة التبريد و الأجهزة المستخدمة لتوفير شرط التخزين، و المواد الكيماوية المستعملة للحفظ ، إضافة الى التكاليف الأخرى.كتكاليف أجهزة الإعلام الآلي المستعملة في تسيير المخزون و تكاليف حمايته وتقادمه، و تكاليف الفوائد و الأرباح الضائعة بسبب تجميد جزء من رأس مال المؤسسة، إضافة الى تكاليف التأمين والضرائب و كراء محلات التخزين، و مصاريف الصيانة والإصلاح، و مرتبات العاملين على تسيير المخزون و حراسته، كما تشمل تكاليف المخاطرة كتكلفة تقادم المخزون و الخسائر الناجمة عن تلف أجزاء منه...الخ.

سابعا: نموذج كمية الطلب الإقتصادية - نموذج ويلسون: يقصد بكمية الطلب الإقتصادية، كمية المخزون التي يتم طلبها و التي تجعل مجموع تكاليف المخزون في أدنى قيمها، وهي كمية يتم إشتقاقها رياضيا بناء على نموذج ويلسون.

1- **فرضيات النموذج:** يقوم النموذج على أربع فرضيات أساسية هي:

أ- أن الطلب معروف و محدد بقيمة ثابتة و هو لا يتغير عبر الزمن، و هو مستمر.

ب- أن الطلبية تلبى حالا، أي أن الوقت بين إعداد الطلبية و وصول السلعة يكون معدوما.

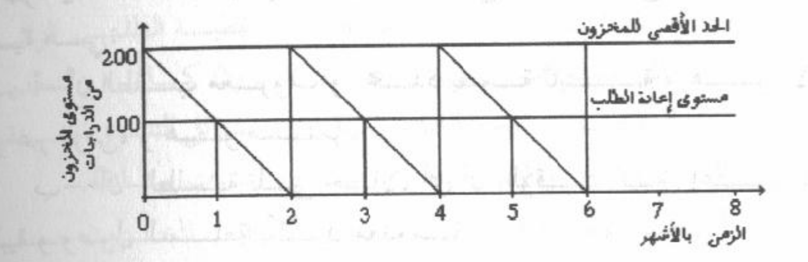
ج- أن السلعة تكون جاهزة حالا و لا ينتظر قدومها مستقبلا أو لا ينتظر تركيبها حتى تصبح جاهزة.

د- أن تلبية كل الطلبات تتم من المخزون الحالي.

2- **سلوك المخزون عبر الزمن:** إن إدارة المخزون تحرص على أن يكون المخزون عند مستوى معين في أي وقت، بحيث أن المخزون يتكون حالا قبل وصول الكمية المخزنة الى الصفر، بافتراض أن مؤسسة ما تقوم بتسويق الدراجات النارية، بحجم 100 دراجة شهريا، وبافتراض أن هذه المؤسسة تتبع سياسة بحيث تسمح لها بالحصول على مخزون أول كل شهر يبلغ 200دراجة، ويعني ذلك أن هذا المخزون سينفذ بعد شهرين، لذلك يجب عليها أن تصدر أوامر الشراء لتعويض الكمية المباعة قبل نهاية الشهر الثاني، كما يجب عليها جدولة مواعيد الاستلام بحيث تصل كميات التعويض الى المخزن قبل توزيع آخر دراجة و هذا بغية تخفيض تكاليف الإحتفاظ

بالمخزون الى أدنى قيمة ممكنة، و يمكن تمثيل ذلك بيانيا كما يلي:

سلوك مستوى المخزون عبر الزمن



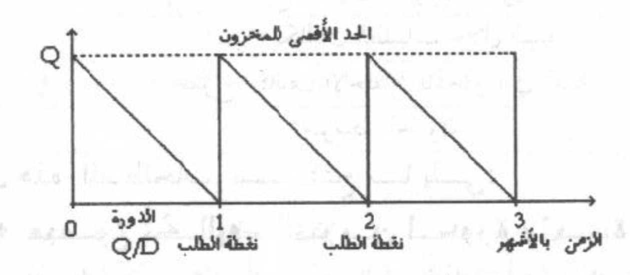
شكل16-1

يلاحظ من الرسم أن المخزون يتجدد باستمرار، و أن المؤسسة تبيع 100 وحدة شهريا و تحصل على الطلبية الجديدة قبل انتهاء مخزونها، حيث أن الحد الأقصى لمخزونها من الدراجات يبلغ 200 وحدة، و أن المخزون يتعاود بانتظام عبر الزمن.

و عادة ما تقوم المؤسسة باصدار امر التوريد عند وصول المخزون الى مستوى معين، و يشار الى ذلك **بنقطة إعادة الطلب**، و تحدد هذه النقطة وفق عدة إعتبارات منها معدل التسويق و فترة التوريد ، و يكون للخبرة السابقة و القدرة على توقعات الإستهلاك و احتمالات التأخر في التوريد الأهمية الكبرى في تحديد هذه النقطة، و قد تتحدد عند وصول مستوى المخزون الى النصف أو الثلث...، و في كل الحالات يجب تفادي إصدار أمر التوريد عند نفاذ الكمية كلية، و في الشكل

أعلاه يمكن أن يكون مستوى إعادة الطلب عند الكمية 100 دراجة، و لاينتظر أن تصل الكمية الى الصفر لإعادة الطلب.

فإذا كان حجم الطلبية الواحدة هو Q وحدة يتم بيعها للمستهلكين الذين يطلبون هذه المادة بمعدل ثابت قدره D وحدة في السنة فإنه من خلال الشكل الموالي يظهر أنه:



شكل16-2

في الفترة صفر تم إستقبال طلبية قدرها Q استهلكت بمعدل D وحدة في السنة و بالتالي فإن المخزون ينتهي بعد فترة من الزمن تقدر بـ Q/D و هي ما يعبر عنها بالدورة، و عند ذاك يتم إستقبال كمية أخرى قدرها Q أيضا فيعود المخزون الى مستواه الأصلي عند بداية الدورة الثانية و تستمر العملية بهذا الشكل.

فإذا كان حجم الطلبية مثلا هو Q=100 وحدة، و أن معدل الطلب السنوي هو D=1200 وحدة، فإن الدورة الواحدة للمخزون هي Q/D أي: 1/12 أي شهر واحد.

3- التحديد الرياضي لكمية الطلب الإقتصادية:

لتحديد كمية الطلب الإقتصادية رياضيا نصطلح على مايلي:

الرمز	الإشارة
Q	حجم الطلبية كما تم تعريفها سابقا بالوحدات
D	معدل الطلب السنوي بالوحدات
C	تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المخزون
F	التكلفة الثابتة لكل طلبية
R	معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة
Tc	مجموع تكاليف المخزون السنوية
Toc	مجموع تكاليف الطلبيات خلال السنة
THc	مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون في السنة
Q/2	متوسط المخزون

من خلال هذه المصطلحات نستنتج ما يلي:

- **مجموع تكاليف التخزين لدورة واحدة:** و هي عبارة عن مجموع تكاليف الطلبيات مضافا اليها مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون لمدة دورة واحدة.

واضح أن تكاليف الطلبيات خلال دورة واحدة ثابتة لكل طلبية و بالتالي فهي F بينما تكاليف الإحتفاظ بالمخزون خلال دورة واحدة فيمكن كتابتها بدلالة متوسط المخزون، فإذا كان متوسط المخزون هو Q/2 و تكلفة شراء الوحدة الواحدة منه هي C فإن قيمة متوسط المخزون هي:

$$C \times \frac{Q}{2} \qquad 1-16$$

و بما أن R هو معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة، لذلك فإن مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون خلال سنة هو:

$$C \times R \times \frac{Q}{2} \qquad 2-16$$

وحيث أن السنوات الموجود في دورة واحدة هو Q/D (يكون في الغالب رقم عشري)، فإن مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون خلال دورة واحدة هو:

$$C \times R \times \frac{Q}{D} \times \frac{Q}{2} \qquad 3-\ \ 9$$

و يمكن كتابة 16-3 على النحو التالي:

$$C \times R \times \frac{Q^2}{2D} \qquad 4-16$$

و بالتالي يمكن صياغة تكاليف المخزون خلال دورة واحدة لتصبح كما يلي:

$$F + C \times R \times \frac{Q^2}{2D} \qquad 5-16$$

- **مجموع تكاليف التخزين خلال دورات السنة:** بما أن عدد الدورات في السنة عبارة عن الطلبيات خلالها، لذلك فإن عدد الدورات في السنة نحصل عليه بقسمة حجم الطلب السنوي على كمية الطلبية الواحدة أي: D/Q و منه فإن مجموع تكاليف التخزين خلال السنة هو:

$$Tc = \left(F + C \times R \times \frac{Q^2}{2D}\right) \times \frac{D}{Q} \qquad 6-16$$

و بالإختزال نجد أنه يمكن كتابة مجموع تكاليف التخزين خلال دورات السنة على النحو:

$$Tc = F \times \frac{D}{Q} + C \times R \times \frac{Q}{2} \qquad 7-16$$

- **إشتقاق كمية الطلب الإقتصادية:** إن هدف المؤسسة هو تدنئة مجموع التكاليف هذه، أي إيجاد كميات الطلب التي تجعل التكاليف في أدنى قيمة لها.

و كما هو معروف لإيجاد القيمة التي تجعل الدالة في أدنى قيمة لها، فإنه يتم إيجاد مشتقتها الأولى و مساواتها للصفر، ثم إختبار مشتقتها الثانية إذا ماكانت أكبر من الصفر.

لذلك نشتق المعادلة 16-7 و نساوي النتيجة الى الصفر.

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q} = \frac{-F\times D}{Q^2} + C\times R\times\frac{1}{2}=0$$

و منه نجد:

$$\frac{F\times D}{Q^2}=\frac{C\times R}{2} \qquad 8-\ 9$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$Q^2\times C\times R = 2\times F\times D$$

و عليه فإن كمية الطلب الإقتصادية يمكن كتابتها كما يلي:

$$\boxed{Q=\sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}}} \qquad 9-16$$

للتذكير فإن :

Q : كمية الطلب الإقتصادية

D: حجم المبيعات السنوية

F: تكلفة الطلبية للدورة الواحدة

C: تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المخزون

R: معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة.

مثال16-1: تبلغ المبيعات السنوية لمؤسسة تسويق الإسمنت 120.000طن سنويا، تكلفة الطن الواحد 100دج، فإذا كانت تكلفة الطلبية الواحدة تبلغ 300دج، و معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة يبلغ 10%،

المطلوب: حدد كمية الطلب الإقتصادية.

الجواب:

من المعطيات نجد: F=300 D=120.000 C =100 R = 0.1

بالتعويض نجد:

$$Q=\sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}}=\sqrt{\frac{2\times 120000\times 300}{100\times 0.1}}=2683.3$$

أي أن كمية الطلب الإقتصادية التي تجعل التكلفة في أدنى مستوياتها هي 2683 وحدة.

عدد الدورات أو عدد الطلبيات في السنة و نحصل عليه بقسمة الطلب السنوي على كمية الطلب الإقتصادية حيث نجد 44 دورة أي 44 طلبية في السنة أي يتم الطلب كل 8 أيام تقريبا إذا اعتبرنا أن المؤسسة تشتغل طوال السنة و أن عدد أيام السنة هو 366يوم.

و تكون التكلفة الدنيا المتحملة:

$$Tc = F\times\frac{D}{Q}+C\times R\times\frac{Q}{2}=300\times\frac{120000}{2683.3}+100\times 0.1\times\frac{2683.3}{2}=13550.66$$

مثال16-2: إذا كان حجم المبيعات السنوية لمؤسسة الأسمدة الفلاحية هو 200000 طن سنويا، و أن تكلفة شراء الطن الواحد هي 2000 دج، و أن تكلفة الطلبية الواحدة تبلغ 5000 دج، و معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة واحدة تبلغ 25%.

المطلوب: 1- ماهي كمية الطلب الإقتصادية

2- ماهو عدد الطلبيات السنوية المثلى.

3- ما هو طول الدورة الواحدة إذا كانت المؤسسة تتوقف عن العمل لمدة شهر واحد كعطلة سنوية.

4- أوجـد التكلفـة الدنيـا.

الجـواب:

لدينا: D=200000 F=5000 C=2000 R =0.25

1- إيجاد كميـة الطلـب الإقتصاديـة:

تعطى كمية الطلـب الإقتصاديـة بالمعادلـة:

$$Q=\sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}}$$

بالتعويض نجـد:

$$Q=\sqrt{\frac{2.D.F}{C.R}}=\sqrt{\frac{2\times 200000\times 5000}{2000\times 0.25}}=2000$$

أي أن تكلفة الطلـب الإقتصاديـة تبلـغ 2000 طـن في كـل دورة

2- عـدد الطلبيـات المثلى سـنويا:

يتم الحصـول عليـها بقسـمة الطلـب السـنوي أو المبيعـات السـنوية على كمية الطلب الإقتصاديـة حيـث نجدهـا: 100 طلبيـة.

بما أن المؤسسة تتوقـف لمـدة شـهر عـن العمـل، لذلـك فـإن أيـام العمل خلال السـنة تبلـغ 366-30=336 يـوم

3- طول الدورة الواحدة: بقسمة أيام العمل السنوية على عدد الطلبيـات نجد: 3.36 يوم أي انه يتم تقديم طلبية كل ثلاثة أيام تقريبا.

4- التكلفة الدنيـا المتحملة هـي:

$$Tc=F\times\frac{D}{Q}+C\times R\times\frac{Q}{2}$$

بالتعويض نجـد:

$$Tc=F\times\frac{D}{Q}+C\times R\times\frac{Q}{2}=5000\times\frac{200000}{2000}+2000\times 0.25\times\frac{2000}{2}=1000000$$

أي أن التكلفة الدنيا تبلـغ مليـون دينـار.

ثامنـا: نمـوذج الحجـم الأمثـل الإنتـاج: يختلـف هـذا النمـوذج عن نموذج كميـات الطلـب الإقتصاديـة في أن هـذا النمـوذج يكـون الهدف فيه هو تحديد الحجـم الأمثـل الـذي يجب إنتاجـه عنـد كـل تشـغيلة للورشـات، و الـذي يجعـل مجمـوع التكـاليف أقـل مـا يمكن، و يتـم إسـتخدام هـذا النمـوذج خاصـة في خطـوط الإنتـاج التي لا تشتغل باستمرار، أي أن الإنتـاج فيـها يتـم بنـاء علـى طلـب التوريـد.

و يمكن تقسيم هذه التكـاليف الى نوعـين همـا:

1- تكـاليف الإعـداد للتشـغيل: تشـمل هـذه التكـاليف عـدة عنـاصر منـها تكـاليف إعـداد خطـوط الإنتـاج و الآلات، إضافـة الى تكاليف طلب المواد الوسـيطة اللازمـة للعمليـة للإنتاجيـة.

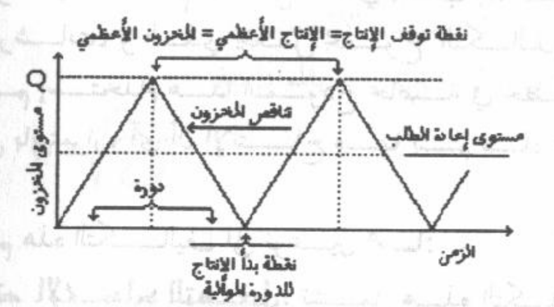
2- تكـاليف الإحتفـاظ بـالمخزون: و هـي التكـاليف العاديـة الناجمة عـن الإحتفـاظ بـالمخزون لفـترة معينـة، كمـا تم التطـرق الى ذلك فيما سبق من هـذا الفصـل.

و يقوم هذا النموذج بناء على عدة فرضيـات منـها مـا يلـي:

- الطلب محدد و بمعـدل ثـابت
- الزمـن المحصـور بـين طلـب البـدء في الإنتـاج و البـدء الفعلي له قد يكون معدومـا، او غـير معـدوم.
- لا يسـمح إلا بالتغطيـة الكليـة للطلبـات، أي لا يسـمح بتغطية جزء فقط مـن الطلـب.

3- مسـتوى المخـزون خـلال الزمـن: يتكـون المخـزون في هذه الحالة بتراكم الفـارق بـين الإنتـاج و الطلـب، فمـا دام الإنتـاج أكبر من الطلب فـإن مسـتوى المخـزون يـتزايد تدريجيـا مـع تزايـد الزمن حـتى يصـل الى أعلـى مسـتوياته، و حينئـذ يتوقـف الإنتـاج نهائيا، في حين يسـتمر الطلـب علـى الكميـات المنتجـة المخزنـة، الى حـين وصـول المخـزون الى مسـتوى معـين، و حينئـذ يشـرع في

الإنتاج مرة أخرى، ليتزايد المخزون مرة أخرى حتى وصوله الى أعلى المستويات، و تتكرر نفس العملية باستمرار، و هذا ما يظهر في الشكل الموالي:



شكل16-3

4- إيجاد كميات الإنتاج الإقتصادية:

لإيجاد كميات الإنتاج الإقتصادية يتم اتباع نفس منهجية إيجاد كميات الطلب الإقتصادية مع بعض الفارق، و لأجل ذلك نصطلح على ما يلي:

Q	كميات الإنتاج في التشغيلة الواحدة
D	معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة
C	تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون
F	التكلفة الثابتة لكل تشغيلة
R	تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة
P	معدل كميات الإنتاج خلال السنة مع: P>D
Tc	مجموع تكاليف التشغيل و الإحتفاظ بالمخزون في السنة
Toc	مجموع تكاليف التشغيل السنوية
THc	مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون السنوية

و من ذلك نجد:

أ- مجموع تكاليف التشغيل السنوية:

عبارة تكلفة كل تشغيلة مضروبة في عدد الدورات، أي:

$$Toc = F \times \frac{D}{Q} \qquad 10-16$$

ب- مجموع تكاليف الإحتفاظ بالمخزون السنوية:

- طول مدة التشغيلة عبارة عن كميات الإنتاج في كل تشغيلة مقسمة على معدل كميات الطلب على المخزون في السنة، أ هي: $\frac{Q}{P}$ سنة، أي هي عبارة عن جزء من السنة، و منه فإن:
- عدد الوحدات التي تطلب خلال التشغيلة هو: $D \times \frac{Q}{P}$ و من ذلك فإن:
- أكبر حجم للمخزون خلال الدورة هو:

$$M = Q - D \times \frac{Q}{P}$$

و بإخراج Q عامل مشترك يكون:

$$M = Q(1 - \frac{D}{P}) \qquad 11-16$$

أما قيمة متوسط المخزون فهي عبارة عن متوسط المخزون مضروبا في تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون، أي:

$$C \times \frac{M}{2}$$

و بضرب هذه القيمة في تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة نجد:

- تكلفة الإحتفاظ بالمخزون و هي:

$$R \times C \times \frac{M}{2} \quad 12-16$$

بما أن $M = Q(1-\frac{D}{P})$ و بالتعويض يمكن كتابة تكلفة الإحتفاظ بالمخزون كما يلي:

$$THc = C.R.\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P}) \quad 13-16$$

و عليه فإن **مجموع تكاليف التشغيل و الإحتفاظ بالمخزون** خلال السنة هي:

$$\boxed{Tc = F.\frac{D}{Q} + C.R.\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})} \quad 14-16$$

و حتى تكون هذه الدالة في أدنى قيمة لها، نساوي مشتقتها الأولى بالنسبة للكميات الى الصفر، أي:

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q} = \frac{-F.D}{Q^2} + \frac{C.R}{2}(1-\frac{D}{P}) = 0$$

و منه نجد:

$$\frac{F.D}{Q^2} = \frac{C.R}{2}(1-\frac{D}{P}) \quad 15-16$$

بضرب الطرفين في الوسطين:

$$2F.D = Q^2\frac{C.R}{2}(1-\frac{D}{P}) \quad 16-16$$

من المعادلة 16-16 نجد:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1-\frac{D}{P})}}} \quad 17-16$$

للتذكير فإن:

- Q كميات الإنتاج الإقتصادية المطلوب إنتاجها في التشغيلة الواحدة
- D معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة
- C تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون
- F التكلفة الثابتة لكل تشغيلة
- R تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة
- P معدل كميات الإنتاج خلال السنة

بعد إيجاد كمية الإنتاج الإقتصادية يمكن إيجاد:

الطول الأمثل للدورة و هو:	$\frac{Q}{D}$ سنة (هو جزء من السنة)
العدد الأمثل للتشغيلات خلال السنة هو:	$\frac{D}{Q}$ تشغيلة في السنة
الطول الأمثل لكل تشغيلة هو:	$\frac{Q}{P}$ سنة
التكلفة الدنيا للتشغيل و الإحتفاظ عند الكمية الإقتصادية هي:	$Tc = F.\frac{D}{Q} + C.R.\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})$

مثال 16-3: تنتج إحدى ورشات النجارة العامة طاولات الدراسة، حيث يقدر معدل الطلب السنوي بـ 8000 طاولة، في حين يصل معدل الإنتاج السنوي الى 10000 طاولة، فإذا كانت كل طاولة تكلف 1000 دج، ومعدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته دينار من المخزون لمدة سنة يبلغ 0.25 ، و أن التكلفة الثابتة لتشغيل سلسلة الإنتاج تبلغ 1000دج، المطلوب:

- ماهو الحجم الأمثل للإنتاج لكل تشغيلة.
- ماهي قيمة التكلفة الدنيا للإنتاج و الإحتفاظ
- حدد الطول الأمثل للدورة
- العدد الأمثل للتشغيلات في السنة
- الطول الأمثل لكل تشغيلة.

الجـــواب:

لديـنـا:

Q	كميات الإنتاج الإقتصادية المطلوب إنتاجها في التشغيلة الواحدة	مجهول
D	معدل كميات الطلب على المخزون خلال السنة	8000
C	تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المخزون	1000
F	التكلفة الثابتة لكل تشغيلة	1000
R	تكلفة الإحتفاظ بما قيمته وحدة نقدية واحدة من المخزون لمدة سنة	0.25
P	معدل كميات الإنتاج خلال السنة	10000

بتطبيق المعادلـــة 16-17 و هـــي:

$$Q=\sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1-\frac{D}{P})}}$$

نجـد:

$$Q=\sqrt{\frac{2.F.D}{C.R(1-\frac{D}{P})}}=\sqrt{\frac{2\times1000\times8000}{1000\times0.25(1-\frac{8000}{10000})}}=565.68$$

يعني هذا أن الكميــات الواجــب إنتاجــها عنــد كــل تشــغيلة و الــتي تجعــل تكــاليف الإنتــاج و التخزيــن في أدنى قيمــة لهــا هـــي 566 طاولة تقريبـــا.

بالتعويض نجد بقية العناصر المطلوبــة و هــي كمــا يلــي:

التكلفة الدنيا للتشـغيل و الإحتفاظ عنـد الكميـة الإقتصادية هي:	$Tc=F.\frac{D}{Q}+C.R.\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})$
و منه نجد: دينار $Tc=1000\times\frac{8000}{565.68}+1000\times0.25\times\frac{565.68}{2}(1-\frac{8000}{10000})=28284.24$	
الطول الأمثـل للـدورة وهو:	$\frac{Q}{D}=\frac{565.68}{8000}=0.070$ سنة أي ما يعادل 26 يوم.
العدد الأمثل للتشغيلات خلال السنة هو:	$\frac{D}{Q}=\frac{8000}{565.68}=14.14$ أي ما يقارب 14 تشغيلة في السنة
الطول الأمثل لكل تشغيلة هو:	$\frac{Q}{P}=\frac{565.68}{10000}=0.056568$ سنة أي ما يعـادل 21 يوم.

تمارين

تمرين1: اعط تعريفا للمخزون.

تمرين2: ماهي أهم وظائف المخزون.

تمرين3: ماذا يقصد بمخزون الأمان القبلي و مخزون الأمان البعدي؟.

تمرين4: حدد العناصر التي تكون تكاليف المخزون.

تمرين5: ماذا يقصد بنقطة إعادة الطلب؟.

تمرين6: ماذا يقصد بتكاليف إعادة التشغيل، ما هي العناصر التي تشملها.

تمرين7: قم بالإستنتاج الرياضي لكمية الطلب الإقتصادية.

تمرين8: قم بالإستنتاج الرياضي لكميات الإنتاج الإقتصادية.

تمرين9: مؤسسة لإنتاج الدراجات النارية تبلغ مبيعاتها السنوية 60.000 دراجة، إذا كانت تكلفة الدراجة الواحدة 30.000 دينار، و تكلفة الطلبية الواحدة 300دينار، و معدل تكلفة الإحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون لمدة سنة هي 25%، **المطلوب:**

1- أوجد كمية الطلب الإقتصادية.
2- ماهي التكلفة الدنيا التي تتحملها المؤسسة؟.
3- ماهو عدد الطلبات المثلى سنويا؟
4- ماهو طول الدورة الواحدة؟

تمرين10: إذا كان معدل الإنتاج للمؤسسة المشار اليها في التمرين السابق يصل الى 70.000 دراجة، و أن التكلفة الثابتة لتشغيل سلسلة الإنتاج لكل تشغيلة تبلغ 3000 دينار، **المطلوب:**

1- ماهو الحجم الأمثل للإنتاج لكل تشغيلة؟
2- ماهي قيمة التكلفة الدنيا للإنتاج و الإحتفاظ؟

3- ماهو الطول الأمثل للدورة؟4- ماهو العدد الأمثل للتشغيلات سنويا؟

تمرين11: تستورد الشركة الوطنية للسيارات 50.000 سيارة سنويا، تكلفة السيارة الواحدة 100.000 دينار، إذا كانت كل طلبية تكلفتها 500 دينار، و تكلفة الإحتفاظ بما قيمته دينار واحد من المخزون 20%، **المطلوب:**

1- إيجاد كمية الطلب الإقتصادية
2- إيجاد قيمة التكلفة الدنيا للمخزون.
3- إيجاد الطول الأمثل للدورة.

تمرين12: تسوق شركات المرئيات 50.000 ألف تلفاز سنويا، تكلفة التلفاز الواحد 2000 دينار، إذا كانت تكلفة كل طلبية تعدها الشركة 500 دينار، و تكلفة الإحتفاظ بما يعادل دينار واحد من المخزون 20 %. **المطلوب:**

1- أوجد كمية الطلب الإقتصادية.
2- أوجد الحد الأدنى للتكاليف التخزين.
3- أوجد الطول الأمثل للدورة.

تمرين13: بافتراض أن تكلفة التلفاز الواحد المشار اليه في المثال السابق ارتفعت بنسبة 25%، المطلوب:

1-أوجد كمية الطلب الإقتصادية.
2- ما هي قيمة و نسبة التغير.
3- ناقش أثر إرتفاع التكلفة على كل من التكلفة الدنيا للمخزون و طول الدورة الأمثل.
4- أجب على نفس الأسئلة في حالة إنخفاض تكلفة التلفاز الواحد بـ 10%.

المراجع

أولا: باللغة العربية.

1. أحمد فهمي هيكل. مقدمة في بحوث العمليات و العلوم الإدارية. جامعة القاهرة. ط2. 1980

2. عامر الدجاني. طريقة المسار الحرج في إدارة المشاريع الإنشائية. دار المستقبل العربي. القاهرة. 1985.

3. د. موفق محمد العيسي. بحوث العمليات- تطبيقات و خوارزميات. دار الحامد. 1999.

4. د. محمد سليمان هدى. بحوث العمليات و اتخاذ القرارات في مجال النقل البحري. ط1. الهيئة المصرية العامة للكتاب. 1981.

5. د. حسين عطا غنيم. دراسات في بحوث العمليات. دار الثقافة العربية. 1997/1996

6. د. محمد محمد كعبور. أساسيات بحوث العمليات- نماذج و تطبيقات. منشورات كلية المحاسبة- غريان. 1992.

7. د. ريتشارد برونسون. ترجمة أ.د. حسن حسني الغباري. بحوث العمليات. سلسلة ملخصات شوم. دار ماكجر و هيل للنشر- الدار الدولية للنشر والتوزيع.1988.

8.د. علي عبدالسلام المعزاوي. بحوث العمليات في مجال الإنتاج و النقل. منشورات دار النهضة العربية. القاهرة. 1980.

9. مصطفى زهير. إدارة المشتريات و المخازن. دار النهضة العربية. بيروت 1976.

10.علي السكر. **بحوث العمليات. القاهرة . 1972.**

11. د. أحمد فؤاد علي. الإتجاهات الحديثة في الإدارة- البرمجة الخطية و بيرت. دار النهضة العربية للطباعة و النشر. بيروت. 1982.

12. د.هناء خير الدين. الإقتصاد الرياضي.مكتبة نهضة الشرق. جامعة القاهرة. 1987.

13. عبدالهادي محمد قريطم. بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتـــاج. دار الجامعات المصرية. 1968.

14.د. محمد سليمان هدى. بحوث العمليات و اتخاذ القرارات في مجال النقـل البحري. الهيئة المصرية العامة للكتاب. فرع الإسكندرية. 1981

15. محمد رشاد الحملاوي، أسامة فريد، حســين شـرارة. إدارة الإنتــاج والعمليات. المكتبات بجامعة عين شمس 1992-1993

ثانيا: باللغة الفرنسية:

16. Gérard Desbazeille. **Exercices et problémes de recherche opérationnelle. DUNOD.**

17. ROBERT FAURE. **Précis de recherche.opérationnelle .Imprimerie OFFSET AUBIN. 1978**

18. KAUFMAN. A. BRUNET A. **Méthodes ét modéles de la recherche opérationnelle.T 1 et 2. Parie. DUNOD.1964.**

19. KAUFMAN. A. **Invitation à la recherche opérationnelle. Parie. DUNOD 1979.**

20. AZOULAY PIERE. **Recherche opérationnelle de gestion. Parie. 1976**

21. GH.OPRIS. **PROGRAMMATION LINEAIRE. O.P.U. Algérie. 1983.**

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية - بن عكنون
الجزائر